1. Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Рассмотрим ф-ю y=f(x): $\{x\}\subset R\to R$, т. а: в $\forall U_\varepsilon(a)$ имеются точки $\{x\}$, отличные от a.

<u>Опр</u> Число b называется <u>предельным значением</u> ф-ии y=f(x) в точке x=a (или пределом ф-ии при $x\to a$), если для $\forall$ сходящейся к a последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значений аргумента x, элементы x_n которой отличны от a, соответствующая последовательность $f(x_1), \dots, f(x_n), \dots$ значений функции сходится к b.

Аналогичным образом определяются прав. и лев. пред. знач. ф-ии.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

<u>Теорема</u> f(x), g(x) на {x}, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = b \pm c,\ \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = b\cdot c,\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (c\neq 0)$$

<u>Опр</u> Ф-я f(x) называется <u>непрерывной в т. а</u>, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

<u>Теорема</u> Пусть f(x), g(x) на {x} непр. в точке a $\Rightarrow$ *f(x)±g(x), f(x)·g(x), f(x)/g(x) (g(a)≠ 0) непрерывны в т.а.*

Пусть x=φ(t) на {t}, {x}-ее множество значений, y=f(x) на {x} $\Rightarrow$ *на {t} задана сложная ф-я y=f(x), где x=φ(t), или y=f[φ(t)]=F(t)*
<u>Теорема</u> Если ф-я x=φ(t) непр в точке a, а ф-я y=f(x) непр в точке b=φ(a), то y=f[φ(t)]=F(t) непр в точке a.

<u>Опр</u> Число b называется <u>предельным значением</u> ф-ии f(x) в точке a, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$*:* $\forall x: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$
<u>Опр</u> Ф-я f(x) называется <u>непрерывной в точке</u> x=a, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x: |x-a|<\delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$
<u>Опр</u> f(x) удовлетворяет в т x=a <u>условию Коши</u>, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x',x'': 0<|x'-a|<\delta, 0<|x''-a|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$
<u>Теорема</u> (Критерий Коши) $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x)$ *удовлетворяет в точке a условию Коши*

♦ $\Rightarrow$ *Пусть* $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x',x'': 0<|x'-a|<\delta, 0<|x''-a|<\delta$
$\Rightarrow |f(x')-b|<\varepsilon/2,\ |f(x'')-b|<\varepsilon/2 \Rightarrow |f(x')-f(x'')|\le|f(x')-b|+|f(x'')-b|\le\varepsilon$
$\Leftarrow$ *Пусть* $\{x_n\}\to a$ *и* $x_n\ne a$
Фиксируем $\forall\varepsilon>0$*, возьмем* δ *из условия Коши* $\Rightarrow \exists N: \forall n\ge N\ 0<|x_n-a|<\delta \Rightarrow \forall p=1,2,\ldots$
$0<|x_{n+p}-a|<\delta \Rightarrow$ *по усл Коши* $|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\}$ *явл-ся фундаментальной посл-ю* $\Rightarrow \Rightarrow \{f(x_n)\}\to b$
Пусть $\{x_n\}, \{x_n'\}\to a,\ x_n\ne a,\ x_n'\ne a,\ \{f(x_n)\}\to b,\ \{f(x_n')\}\to b'$*. Докажем, что b=b'.*
Рассмотрим посл-ть $f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'),\ldots$ *- она сходится* $\Rightarrow \forall$ *ее подпосл-ть сходится к одному числу, включая* $\{f(x_n)\}, \{f(x_n')\} \Rightarrow b=b'$*.* ♦

<u>Свойства ф-й, непрерывных на отрезке</u>

1. *Если f(x) непр в точке a, и f(a)≠0, то ∃δ-окрестность точки a:* $\forall x\in U_\delta(a)\ \ f(x)\ne0$ *и sgn f(x)=sgn f(a)*

♦ $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x) = b = f(a)\ne 0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0: \forall x: |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$*, т.е.*
$b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ *при* $a-\delta<x<a+\delta$*. Пусть* $\varepsilon<|b| \Rightarrow b-\varepsilon, b+\varepsilon, b$ *– одного знака* $\Rightarrow$ *всюду в* $U_\delta(a)$ *ф-я f(x) сохраняет знак числа b.* ♦

2. *Пусть f(x) непр на [a, b] и sgn f(a)≠ sgn f(b)* $\Rightarrow \exists\xi\in(a, b): f(\xi)=0$

♦ *Пусть f(a)<0, f(b)>0. Рассмотрим мн-во* $\{x\}\in[a,b]: f(x)<0\ \ \forall x\in\{x\},\ a\in\{x\}$*, {x} ограничено сверху (числом b)* $\Rightarrow \exists$ *точная верхняя грань* ξ*. Она является внутренней точкой [a, b], т.к. ∃правая полуокрестность точки a, в которой f(x)<0 и левая полуокр-ть точки b, в которой f(x)>0. Докажем, что f(ξ)=0. Если это не так, то по свойству 1* $\exists\, U_\delta(\xi)$*, в которой f(x) имеет определенный знак, но это невозможно, т.к.* ξ *- точная верхняя грань.* ♦

3. *Пусть f(x) – непр на [a, b], f(a)=A, f(b)=B. Пусть C∈[A, B]* $\Rightarrow \exists\xi\in[a, b]: f(\xi)=C$

♦ *Пусть A≠B, C≠A, C≠B и пусть A<C<B Введем φ(x)=f(x)-C*
φ(x) непр на [a, b], φ(a)<0, φ(b)>0 $\Rightarrow \exists\xi\in[a, b]: \varphi(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=C$ ♦

4. *Если f(x) непр на [a, b]* $\Rightarrow$ *f(x) огр на [a, b]*

♦ *Докажем, что f(x) огр сверху на [a, b]. Предположим обратное* $\Rightarrow \forall n=1,2,\ldots\ \exists x_n\in[a, b]: f(x_n)>n$*. Таким образом,* $\exists\{x_n\}$*:* $\{f(x_n)\}$ *– бесконечно большая. Т.к.* $\{x_n\}$ *– огр, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность* $\{x_{kn}\}\to\xi\in[a, b]$*. В силу непрерывности f(x) в точке* $\xi\ \{f(x_{kn})\}\to f(\xi)$*. Но это невозможно, т.к.* $\forall$ *п/посл-ть б.б. посл-ти является б.б.* ♦

5. *Пусть f(x) огр сверху (снизу). Число M (m) называют <u>точной верхней (нижней) гранью</u> ф-ии f(x) на [a, b], если: 1)* $\forall x\in[a, b]\ f(x)\le M\ (f(x)\ge m)$*; 2)* $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in[a, b]: f(x)>M-\varepsilon\ (f(x)<m+\varepsilon)$

$$M=\sup_{[a,b]} f(x),\quad m=\inf_{[a,b]} f(x)$$

<u>Теорема</u> Если f(x) непр на [a, b], то она достигает на [a, b] своих точных верней и нижней граней
♦ *Пусть f(x) не достигает т.верхней грани M, т.е.* $\forall x\in[a, b]\ \ f(x)<M$

Рассмотрим $F(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}>0\quad \forall x\in[a,b]$*. F(x) непр на [a, b]* $\Rightarrow$ *огр, т.е.∃B>0:*

$\forall x\in[a,b]\quad F(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}\le B \Rightarrow f(x)\le M-\dfrac{1}{B}\quad \forall x\in[a,b] \Rightarrow$ *M не является точной верхней гранью.* ♦

<u>Опр</u> Ф-я f(x) называется равномерно непрерывной на {x}, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x',x''\in\{x\}: |x'-x''|<\delta\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$
<u>Теорема</u> Непрерывная на [a, b] ф-я f(x) равномерно непрерывна на [a, b]
♦ *Предположим обратное:* $\exists\varepsilon>0: \forall\delta>0\ \exists x',x'': |x''-x'|<\delta\ \ |f(x'')-f(x')|\ge\varepsilon \Rightarrow$ *Для* $\delta_n=1/n\ \exists x'_n, x''_n: |x''_n - x'_n|<1/n$*, но* $|f(x''_n)-f(x'_n)|\ge\varepsilon$ *(*)*
Из $\{x'_n\}$ *можно выделить сходящуюся п/посл-ть* $\{x'_{kn}\}\to c$*. Очевидно, п/посл-ть* $\{x''_{kn}\}\to c$*.*
Т.к. f(x) непр в точке c, то $\{f(x'_{kn})\}\to f(c), \{f(x''_{kn})\}\to f(c) \Rightarrow \{f(x''_{kn})-f(x'_{kn})\}$ *является бесконечно малой, что противоречит (*).* ♦

NB На неограниченном мн-ве это не так. Контрпример: $y=x^2$

2. Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости.

Пусть ф-я y=f(x) определена на (a, b)

<u>Опр</u> Производной ф-ии y=f(x) в данной т. x называется предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$*, если предел сущ-ет.*

<u>Опр</u> Ф-я y=f(x) называется дифференцируемой в данной точке x, если приращение Δy этой функции в т. x, соответствующее приращению Δx, может быть представлено в виде $\Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x$*, где A – const, не зависящая от Δx,* $\alpha\to 0$ *при* $x\to 0$*.*

<u>Теорема</u> Ф-я y=f(x) является дифференцируемой в точке x $\Leftrightarrow$ *f(x) имеет в точке x конечную производную.*

♦ $\Rightarrow \Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x$. *Пусть* $\Delta x\neq 0\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha$ $\Delta x\to 0\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}\to A$

$\Leftarrow$ *Пусть* $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\Rightarrow$ *функция* $\alpha(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)$ *является беск малой при* $\Delta x\to 0$*, т.е.* $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$*, где* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0\Rightarrow$ *f(x) дифференцируемая.* ♦

<u>Опр</u> <u>Дифференциалом</u> ф-ии y=f(x) в точке x, соответствующим приращению Δx, называется главная линейная относительно Δx часть приращения этой ф-ии в точке x. $dy=A\Delta x=f'(x)\Delta x$ *dx – дифференциал независимой переменной x -* $\forall$ *число. Пусть* $dx=\Delta x\Rightarrow dy=f'(x)dx\Rightarrow f'(x)=\frac{dy}{dx}$

<u>Теорема</u> Пусть y=f(x) в окрестности точки x_0 *возрастает (убывает) и непрерывна. y=f(x) дифференцируема в* x_0 *и* $f'(x_0)\neq 0\Rightarrow \exists x=f^{-1}(y)$*, которая дифференцируема в* $y_0=f(x_0)$ *и* $x'(y_0)=1/f'(x_0)$

♦ *В* y_0 *придадим аргументу y приращение* $\Delta y\neq 0$*, ему отвечает* $\Delta x\neq 0$ *(т.к. ф-я возрастает (убывает))* $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1\big/\frac{\Delta x}{\Delta y},\Delta y\to 0$.

Т.к. $x=f^{-1}(y)$ *непр, то* $\Delta x\to 0$*. Но при* $\Delta x\to 0$ $1\big/\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 1/f'(x_0)\Rightarrow \exists\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\{f^{-1}(y_0)\}'=\frac{1}{f'(x_0)}$ ♦

<u>Теорема</u> Пусть $x=\varphi(t)$ *дифф в точке* t_0*, а y=f(x) дифф в точке* $x_0=\varphi(t_0)\Rightarrow$ *сложная ф-я* $y=f(\varphi(t))$ *дифф в точке* t_0 *и* $[f(\varphi(t_0))]'=f'(x_0)\varphi(t_0)$*.*

♦ $\Delta t\to\Delta x\to\Delta y$ $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$; $\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\Delta t\to 0$*, т.к. x непр, то* $\Delta x\to 0\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0;\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\varphi'(t_0)$. ♦

Инвариантность формы 1 дифференциала $dy=f'(x)dx$ *не только в случае, когда x – независимая переменная*

Пусть $y=f(\varphi(t))$, $y'=f'(x)\varphi'(t)$

$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt}, y'=\{f[\varphi(t)]\}'=\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}\Rightarrow dy=f'(x)dx\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

<u>Теорема (Ролля)</u> $f(x)\in C[a,b]$ *и дифф на [a, b],* $f(a)=f(b)\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]: f'(\xi)=0$

<u>Теорема (Лагранжа)</u> $f(x)\in C[a,b]$ *и дифф на [a, b]* $\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]: f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

<u>Функции n переменных</u>

<u>Опр</u> Если $\exists$ *предел частного приращения* $\Delta_{x\kappa}u$ *в точке* $M(x_1\ldots x_m)$

$\frac{\Delta_{xk}u}{\Delta x_k}=\frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_m)-f(x_1,\ldots,x_m)}{\Delta x_k}$*, соответствующий приращению* Δx_κ *аргумента* x_κ*, при* $\Delta x_\kappa\to 0$*, то этот предел называется <u>частной производной</u> ф-ии* $u=f(x_1\ldots x_m)$ *в точке M по аргументу* x_κ*, и обозначается* $\frac{\partial u}{\partial x_k}=\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{xk}u}{\Delta x_k}$.

<u>Опр</u> Ф-я $u=f(x_1\ldots x_m)$ *называется <u>дифференцируемой в данной точке</u>* $M(x_1\ldots x_m)$*, если*

$\Delta u=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_m\Delta x_m$ *или* $\Delta u=A_1\Delta x_1+\ldots+A_m\Delta x_m+\bar{o}(\rho),\quad \rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_1^2}$

$A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m$ *– главная линейная отн-но приращений аргументов часть приращения дифференцируемой ф-ии (если* $A_1\ldots A_m\neq 0$ *одновременно)*

<u>Теорема</u> Если $u=f(x_1\ldots x_m)$ *дифф-ма в точке M, то в этой точке* $\exists$ *частные производные по всем аргументам:* $\frac{\partial u}{\partial x_i}=A_i$*,*

i=1…m ♦ $\Delta_{xi}u=A_i\Delta x_i+\alpha_i\Delta x_i\Rightarrow\frac{\Delta_{xi}u}{\Delta x_i}=A_i+\alpha_i\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{xi}u}{\Delta x_i}=A_i$ ♦

<u>Следствие:</u> $\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m+\bar{o}(\rho)$

Если $u=f(x_1\ldots x_m)$ *дифф-ма в точке M, то она и непр в этой точке.*

<u>Теорема (достаточное условие дифф-ти)</u> Если ф-я $u=f(x_1\ldots x_m)$ *имеет частные производные по всем аргу-ментам в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)$ *и они непр в* M_0*, то эта ф-я дифф-ма в точке* M_0*.*

♦ *Рассмотрим случай u=f(x,y). Частные производные* f_x' *и* f_y' $\exists$ *в окрестности* M_0 *и непр в* M_0*.*

Возьмем Δx, Δy: $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ *принадлежит указанной окрестности* M_0*.*

$\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=$

$=f_x'(x_0+\Theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\Theta_2\Delta y)\Delta y$

В силу непрерывности производной в точке M_0*:* $f_x'(x_0+\Theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)+\alpha$

$f_y'(x_0,y_0+\Theta_2\Delta y)=f_y'(x_0,y_0)+\beta$; $\alpha,\beta\to 0$, $\Delta x,\Delta y\to 0\Rightarrow\Delta u=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$

Для n переменных теорема доказывается аналогично ♦

<u>Опр</u> <u>Дифференциалом</u> du ф-ии $u=f(x_1\ldots x_m)$*, дифф-мой в точке M, называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой ф-ии в точке M:* $du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m$

3. Определенный интеграл и его свойства. Основная формула интегрального исчисления.

Пусть

- $f(x)$ определена в каждой точке на $[a,b]$
- Разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
- $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$

Опр Число $I\{ x_i , \xi_i \} = f(\xi_1)*\Delta x_1 + f(\xi_2)*\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)*\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой функции $f(x)$, соответсвующей данному разбиению T. Число $\Delta = \max_i \Delta x_i$ называется диаметром разбиения T. •

Опр Число I называется пределом интегральной суммы $I\{ x_i , \xi_i \}$ при $\Delta \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$, что $\forall \ T : \Delta < \delta$ независимо от выбора ξ_i справедливо $| I\{ x_i , \xi_i \} - I | < \varepsilon$. Конечный I называется определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a,b]$. •

Опр Функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a,b]$, если существует конечный I. •

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то есть $\exists$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i - 1, x_i]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i - 1, x_i]} f(x)$$

Определим

$$\overline{S} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$ (Верхняя интегральная сумма)

$$\underline{s} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$ (Нижняя интегральная сумма)

функции $f(x)$ для данного разбиения T отрезка $[a,b]$. Очевидно, что $\underline{s} \le I\{x_i, \xi_i\} \le \overline{S}$.

Т $\forall$ фиксированного разбиения T, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$: $0 \le \overline{S} - I\{x_i, \xi_i\} \le \varepsilon$.

Док-во По определению sup $\forall i \ \exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$: $0 \le M_i - f(\xi_i) \le \varepsilon / (b-a)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Умножим на Δx_i и просуммируем по i; получаем $0 \le S - I\{x_i, \xi_i\} \le \varepsilon$. •

Т $\forall$ фиксированного разбиения T, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$: $0 \le I\{x_i, \xi_i\} - \underline{s} \le \varepsilon$.

Док-во Аналогично пред. •

Т Пусть разбиение T' получено из T добавлением новых точек $\Rightarrow$ $\overline{S}' \le \overline{S}, \underline{s}' \ge \underline{s}$.

Док-во Пусть T' получено из T добавлением x' на $[x_{i-1}, x_i]$, M' и M'' - точные верхние грани на $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$; $\Delta x_i'$ и $\Delta x_i''$ - длины. $\Delta x_i = \Delta x_i' + \Delta x_i''$, $M_i' <= M_i$, $M_i'' <= M_i \Rightarrow$
$S - S' = M_i\Delta x_i - (M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i'') = (M_i - M_i')\Delta x_i' + (M_i - M_i'')\Delta x_i'' >= 0$. •

Т Пусть T', T'' - $\forall$ разбиения отрезка $[a,b] \Rightarrow$ $\underline{s}' \le \overline{S''}, \underline{s}'' \le \overline{S'}$

Док-во Пусть $T = T' \cup T'' \Rightarrow$ $\underline{s}' \le \underline{s} \le \overline{S} \le \overline{S''}, \underline{s}'' \le \underline{s} \le \overline{S} \le \overline{S'}$.•

Т {S} - множество, ограниченное снизу, {s} - ограниченное сверху.

Док-во Следует из предыдущей теоремы. •

Опр $\bar{I} = \inf_{\forall T}\{\overline{S}\}, \underline{I} = \sup_{\forall T}\{\underline{s}\}$ называются верхней и нижней суммами Дарбу от $f(x)$.

Т $\underline{I} \le \bar{I}$.

Док-во Пусть $\underline{I} \ge \bar{I} \Rightarrow \underline{I} - \bar{I} = \varepsilon > 0$. Из определения inf и sup $\Rightarrow$

$$\exists \overline{S}', \underline{s}'' : \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{S}', \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{s}'' \Rightarrow \overline{S}' - \underline{s}'' < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} - \underline{I} + \frac{\varepsilon}{2} = 0 \Rightarrow \overline{S}' - \underline{s}'' < 0 \Rightarrow \text{противоречие.}$$ •

Т Пусть разбиение T' получено из T добавлением p новых точек $\Rightarrow$ $\overline{S} - \overline{S}' \le (M-m)p\Delta, \underline{s}' - \underline{s} \le (M-m)p\Delta$.

Док-во Пусть была добавлена $x' \in [x_{i-1}, x_i]$, тогда

$$\overline{S} - \overline{S}' = M_i(\Delta x_i' + \Delta x_i'') - (M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i'') = (M_i - M_i')\Delta x_i' + (M_i - M_i'')\Delta x_i'' \le$$

$$(M-m)(\Delta x_i' + \Delta x_i'') = (M-m)\Delta x \le (M-m)\Delta.$$ •

Лемма Дарбу $\bar{I} = \lim_{\Delta \to 0} \overline{S}, \underline{I} = \lim_{\Delta \to 0} \underline{s}$.

Док-во Докажем, что $\bar{I} = \lim\limits_{\Delta\to 0}\bar{S}$. Предположим, что M > m (если M = m, то очевидно).

$\forall\varepsilon > 0\ \exists T^*$: $S^* - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть p - число точек разбиения T^*, лежащих строго внутри [a,b]. Пусть T - любое разбиение [a,b]:

$\Delta < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$. Добавим к нему точки разбиения T^*, лежащие строго внутри [a,b] и получим T'. Тогда для T'

$0 \le \bar{S} - \bar{S}' \le (M-m)p\Delta \le \frac{\varepsilon}{2}$.

С другой стороны, $T' = T^* \cup T \Rightarrow \bar{I} \le S' \le S^* \Rightarrow 0 \le S' - \bar{I} \le S^* - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \le S - \bar{I} < \varepsilon$. Таким образом, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$

$(= \frac{\varepsilon}{2(M-m)p})$: $S - \bar{I} < \varepsilon \quad \forall T : \Delta < \delta$.•

Т Ограниченная на [a,b] функция f(x) интегрируема $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists$ разбиение T: $S - s < \varepsilon$.
Док-во
$|\Rightarrow|$ Пусть f(x) интегрируема на [a,b]. Пусть $I = \lim\limits_{\Delta\to 0} I\{x_i, \xi_i\}$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: $\forall T$: $\Delta < \delta$

$|I - I\{x_i, \xi_i\}| < \frac{\varepsilon}{4}$. Зафиксируем такое T. Для него существуют такие две интегральные суммы, что

$S - I\{x_i, \xi_i'\} \le \frac{\varepsilon}{4}, I\{x_i, \xi_i''\} - s \le \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$S - s = (S - I\{x_i, \xi_i'\}) + (I\{x_i, \xi_i'\} - I) + (I - I\{x_i, \xi_i''\}) + (I\{x_i, \xi_i''\} - s) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$.

$|\Leftarrow|$ $\forall T\ \ s \le \underline{I} \le \bar{I} \le S$ и по условию теоремы $\forall\varepsilon > 0\ \ S - s < \varepsilon \ \Rightarrow\ 0 \le \bar{I} - \underline{I} \le \varepsilon \Rightarrow \bar{I} = \underline{I} \overset{def}{=} I$.
По лемме Дарбу I есть общий предел при $\Delta \to 0$ верхних и нижних интегральных сумм $\Rightarrow$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: $\forall T$: $\Delta < \delta$ $I - s < \frac{\varepsilon}{2}, S - I < \frac{\varepsilon}{2}$, то есть при $\Delta < \delta$ справедливо $S - s < \varepsilon$, и $s \le I \le S$.

$\forall I\{x_i, \xi_i\}$ данного T $s \le I\{x_i, \xi_i\} \le S \Rightarrow |I\{x_i, \xi_i\} - I| \le |S - s| \le \varepsilon \Rightarrow$ I есть предел интегральной суммы. •

Свойства определенных интегралов

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$

3. $\int\limits_b^a [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_b^a f(x)dx \pm \int\limits_b^a g(x)dx$, если f(x) и g(x) интегрируемы на [a,b].

Док-во $\sum\limits_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum\limits_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$. Lim по правой части $\Rightarrow$ lim по левой части. •

4. Пусть f,g интегрируемы на [a,b] $\Rightarrow$ f*g интегрируемы на [a,b].
Док-во $|f| \le A$, $|g| \le B$. Рассмотрим любое разбиение T отрезка [a,b]. Пусть $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, тогда
$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]\, g(x'') + [g(x'') - g(x')]\, f(x')$. Так как $|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \le w_i =$
$M_i - m_i$, $|f(x'') - f(x')| \le w_i^f$, $|g(x'') - g(x')| \le w_i^g \Rightarrow w_i \le Bw_i^f + Aw_i^g \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^n w_i\Delta x_i \le B\sum\limits_{i=1}^n w_i^f\ \Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^n w_i^g \Delta x_i$. Так как f и g интегрируемы, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists T$: $\sum\limits_{i=1}^n w_i^f\ \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B}, \sum\limits_{i=1}^n w_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A} \Rightarrow S - s = \sum\limits_{i=1}^n w_i \Delta x_i < \varepsilon$.•

5. $\int\limits_b^a cf(x)dx = c\int\limits_b^a f(x)dx$

6. Пусть f интегрируема на [a,b] $\Rightarrow$ f интегрируема на $\forall$ $[c,d] \subset [a,b]$.
Док-во $\forall\varepsilon > 0\ \exists T$: $S - s < \varepsilon$. Положим $T^* = T \cup \{c\} \cup \{d\} \Rightarrow$ для T^* тем более $S - s < \varepsilon$. Разбиение T^* отрезка [a,b] порождает разбиение T' отрезка [c,d], для которого справедливо $S' - s' \le S - s < \varepsilon$.•

7. Если f интегрируема на [a,c] и [c,b] $\Rightarrow$ f интегрируема на [a,b] и $\int_b^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

8. Пусть f интегрируема и неотрицательна на [a,b] $\Rightarrow \int_b^a f(x)dx \geq 0$.

9. Пусть f интегрируема, неотрицательна и отлична от нуля на [a,b] $\Rightarrow \int_b^a f(x)dx \geq C > 0$.

10. Пусть f,g интегрируемы на [a,b] и выполняется f≥g везде на [a,b] $\Rightarrow \int_b^a f(x)dx \geq \int_b^a g(x)dx$.

11. Пусть f интегрируема на [a,b] $\Rightarrow$ |f| интегрируема на [a,b] и $|\int_b^a f(x)dx| \leq \int_b^a |f(x)|dx$.

Док-во Докажем, что |f| интегрируема на [a,b]. Пусть M_i и m_i - точные верхние и нижние грани f(x) на $[x_{i-1}, x_i]$, M_i'и m_i' - точные верхние и нижние грани |f(x)| на $[x_{i-1}, x_i]$. $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i \Rightarrow S' - s' \leq S - s \Rightarrow S' - s' < \varepsilon$. Так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_b^a |f(x)|dx \leq \int_b^a f(x)dx \leq \int_b^a |f(x)|dx$.•

12. Пусть f,g интегрируемы на [a,b], g≥0, M и m - точные верхняя и нижняя грани f(x) на [a,b] $\Rightarrow$

$$m\int_b^a g(x)x \leq \int_b^a f(x)g(x)dx \leq M\int_b^a f(x)dx.$$

13. Пусть f,g интегрируемы на [a,b], g≥0, M и m - точные верхняя и нижняя грани f(x) на [a,b] $\Rightarrow$

$\exists\mu$: $m \leq \mu \leq M$, $\int_b^a f(x)dx = \mu(b-a)$.

Док-во Положим g≡1 и из свойства 12 получаем: $m(b-a) \leq \int_b^a f(x)dx \leq M(b-a)$.

Пусть $\mu = \frac{1}{b-a}\int_b^a f(x)dx$. Если f(x) непрерывна на [a,b], то $\exists$p,q $\in$[a,b]: m=f(p), M=f(q),

$\exists\xi \in [p,q]$: $f(\xi) = \mu \Rightarrow \int_b^a f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. (формула среднего значения). •

Т (Основная формула интегрального исчисления) Пусть f(x) интегрируема на любом сегменте из (a,b). Пусть c $\in$ (a,b) $\Rightarrow$ $\forall$x $\in$ (a,b) f(x) интегрируема на [c,x] $\Rightarrow$ на (a,b) определена функция $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом.

Утверждение: любая непрерывная на (a,b) функция f(x) имеет на этом интервале первообразную. Одной из них является функция $F(x) = \int_c^x f(t)dt$, где c $\in$ (a,b).

Док-во Докажем, что $\exists\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$. $F(x+\Delta x) = \int_c^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt =$

$= \int_c^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$, $\xi \in [x, \Delta x]$ по формуле среднего значения (свойство 13).

При $\Delta x \to 0$ $f(\xi) \to f(x)$, так как f(x) непрерывна в точке x. $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta\to 0} f(\xi) = f(x)$.•

Любые две первообразных функции f(x) отличаются на const $\Rightarrow$ любая первообразная для непрерывных на [a,b] функций имеет вид $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Пусть x = a $\Rightarrow$ Φ(a) = C, x = b $\Rightarrow \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C \Rightarrow \underline{\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)}$.

(Основная формула интегрального исчисления).

4. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница.

Числовой ряд: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

N-ная частичная сумма: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = S_n$.

Опр Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, если существует конечный $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда. Если предел $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд расходится. •

Т (Критерий сходимости ряда Коши) Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился ⇔ $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ N: $\forall n \geq N$ и p = 1,2,... $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$.•

Следствие. Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} u_k = 0$.•

Т (Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами) Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, где $u_k \geq 0$, сходился ⇔ последовательность частичных сумм ограничена. •

Признаки сравнения:

1. Рассмотрим два ряда с неотрицательными членами: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Пусть $\forall k$ $p_k \leq p_k'$, тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ следует расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.•
2. Рассмотрим два ряда с положительными членами: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Пусть $\forall k$ $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}$, тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ следует расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Док-во Запишем неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}$ для к = 1,2,..n-1 и перемножим

соответсвенно левые и праые части: получаем $p_n \leq \frac{p_1'}{p_1} p_n'$, то есть $\forall n \quad p_n \leq C p_n'$. Применяя свойство 1, доказываем свойство 2. •

Т (Признак Даламбера) Если для любого k, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). Если $\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при L < 1 и расходится при L > 1.

Док-во Положим $p_k' = q^k \, (p_k' = 1) \Rightarrow \frac{p_{k+1}'}{p_k'} = q$, где $q < 1 \left(\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = 1 \right)$ и применим свойство 2 сходимости ряда , откуда следует сходимость (расходимость) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Докажем вторую часть утверждения. Пусть L < 1 ⇒ ∃ε >0: L = 1 - 2ε, то есть L + ε = 1 - ε. По определению предела для ε ∃N: ∀k≥N $L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} = L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$.

Число L + ε = 1 - ε играет роль q в доказательстве первой части утверждения ⇒ ряд сходится. •

Т (Признак Коши)

1. Если для любого k, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $\sqrt[k]{p^k} \leq q < 1 \left(\sqrt[k]{p^k} \geq 1 \right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).
2. Если $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при L < 1 и расходится при L > 1.

Док-во Положим , где $\Rightarrow\ p_k \le p_k^{'}\left(p_k \ge p_k^{'}\right)$.Применим свойство 1 сходимости ряда , откуда следует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$.Доказательство второй части утверждения аналогично доказательству второй части признака Даламбера (с заменой $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ на $\sqrt[k]{p_k}$).•

Т (Интегральный признак Коши-Маклорена) Пусть f(x) - неограниченна и не возрастает на x≥m, где m - любой номер. Ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + \ldots$ сходится $\Leftrightarrow\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, где $a_n = \int\limits_m^n f(x)dx$.

Док-во Пусть k - любой номер, удовлетворяющий неравенству k ≥ m + 1, x ∈ [k-1,k]. Из невозрастания f(x) следует, что ∀x справедливо f(k) ≤ f(x) ≤ f(k-1). Функция f(x) интегрируема на
[k-1,k] и более того $\int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \le \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \le \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)dx$, $f(k) \le \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k-1)$.

∀ k ≥ m + 1 справедливо: $\begin{cases} f(m+1) \le \int\limits_{m}^{m+1} f(x)dx \le f(m) \\ f(m+2) \le \int\limits_{m+1}^{m+2} f(x)dx \le f(m+1) \\ \ldots \\ f(n) \le \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx \le f(n-1) \end{cases}$

Суммируя строки системы неравенств и обозначая $S_n = \sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$, получаем: $\sum\limits_{k=m+1}^{n} f(k) \le \int\limits_m^n f(x)dx \le \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k)$, или $S_n - f(m) \le a_n \le S_{n-1}$. Последовательность a_n - неубывающая ⇒ для ее сходимости необходима лишь ее ограниченность сверху Для сходимости ряда из условия теоремы необходимо и достаточно ограниченности последовательности S_n. Из неравенства $S_n - f(m) \le a_n \le S_{n-1}$ следует, что S_n ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность a_n , то есть тогда и только тогда, когда a_n сходится. •

Опр Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ абсолютно сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$.•

Из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ следует его сходимость.

Опр Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ условно сходится, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится.•

Опр Последовательность $\{v_k\}$ называется последовательностью с ограниченным изменением, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$.

Т Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а $\{v_k\}$ - последовательность с ограниченным изменением, сходящаяся к 0, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится. •

Опр Знакочередующийся ряд (нечетные с ‘+’, четные - с ‘-‘) , модули членов которого образуют невозрастающую сходящуюся к 0 последовательность, называется рядом Лейбница. •

Т (Признак Лейбница) Любой ряд Лейбница сходится.

Док-во $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k$ - ряд Лейбница, где $\{v_k\}$ - невозрастающая сходящаяся к 0 последовательность, $v_k > 0$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k, u_k = (-1)^{k-1}$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм. $\{v_k\}$ - последовательность с ограниченным изменением ⇒ ряд Лейбница сходится. •

5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Непрерывность равномерно сходящегося ряда непрерывной функции.

Пусть в E^m задано $\{x\}$. Если $\forall n = 1,2,..$ ставится в соответствие по определенному закону функция $f_n(x)$, определенная на $\{x\}$, то множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x),\ldots$ будем называть <u>функциональной последовательностью(ФП)</u>. $\{x\}$ - <u>область определения функциональной последовательности</u> $\{f_n(x)\}$. Рассмотрим ФП $\{u_n(x)\}$. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ - <u>функциональный ряд (ФР)</u>. $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ - <u>n-я частичная сумма ФР</u>. Изучение ФП эквивалентно изучению ФР, так как каждой ФП соответсвует ФР, каждому ФР - ФП. Фиксируем любой $x_0 \in \{x\}$ и рассмотрим все члены ФР в точке x_0. Получим числовой ряд. Если указанный числовой ряд сходится, то <u>ФР сходится в точке x_0</u>. Множество всех точек x_0, в которых ФР сходится, называется <u>областью сходимости ФР</u>. Если ФР имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$, то на этом множестве определена функция S(x), являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда, и называющаяся <u>суммой ФР</u>.

<u>Опр</u> ФП называется <u>равномерно сходящейся на множестве $\{x\}$ к сумме S(x)</u>, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in \{x\}\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.•

<u>Опр</u> ФР называется <u>равномерно сходящимся на множестве $\{x\}$ к сумме S(x)</u>, если последовательность $S_n(x)$ его частичных сумм сходится равномерно на $\{x\}$ к S(x). •

<u>Т</u> ФП $\{S_n(x)\}$ является равномерно сходящейся на множестве $\{x\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p = 1,2,..., \forall x \in \{x\}\ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

<u>Док-во</u>

<u>|$\Rightarrow$|</u> Пусть $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно к некоторой функции S(x) $\Rightarrow$ фиксируем $\forall \varepsilon > 0$, для него $\exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in \{x\}$ $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. $\forall p = 1,2,\ldots$ тем более

$$\left|S_{n+p}(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| \leq \left|S_{n+p}(x) - S(x)\right| + \left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon.$$

<u>|$\Leftarrow$|</u> Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p = 1,2,..., \forall x \in \{x\}\ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Отсюда и из критерия Коши сходимости последовательности вытекает сходимость последовательности $\{S_n(x)\}$ в $\forall$ точке $x \in \{x\}$ и существование функции S(x), определенной для $\forall x \in \{x\}$. Фиксируем $\forall n \geq N(\varepsilon)$, фиксируем $\forall x \in \{x\}$, перейдем к пределу при $p \to \infty \Rightarrow \forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall x \in \{x\} \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| \leq 2\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow$ сходимость. •

<u>Следствие</u> ФР $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к S(x) на $\{x\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p = 1,2,..., \forall x \in \{x\}$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$.•

<u>Признак Вейерштрасса</u> Если ФР $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определен на $\{x\}$ и если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ $\forall x \in \{x\}$, $\forall k$ справедливо $u_k \leq |c_k| \Rightarrow$ ФР сходится равномерно на $\{x\}$.

<u>Док-во</u> Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$, для него $\exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p = 1,2,\ldots$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$ $\forall n \geq N(\varepsilon), \forall p, \forall x$. •

Рассмотрим x_0 - предельную точку множества $\{x\}$.

<u>Т</u> Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $\{x\}$ к S(x) и $\forall k$

$$\exists \lim_{x \to x_0} u_k(x) = b_k \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x \to x_0} u_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

<u>Док-во</u> Докажем сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Так как ФР сходится равномерно, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p = = 1,2,\ldots, \forall x$ $\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$. Фиксируем n и p и перейдем к пределу при $x \to x_0$.

$\Rightarrow \left|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}\right| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$. В силу критерия Коши $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right]$$

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n}b_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right|.$$

Фиксируем $\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ n: $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного ε и выбранного n $\exists\delta > 0$: $\forall x \in\{x\}$: $0<\rho(x,x_0)<\delta$ выполняется $\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n}b_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}$

$$\Rightarrow \left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty}b_k\right|<\varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\ .\bullet$$

<u>Следствие</u> Если в условиях теоремы дополнительно потребовать, чтобы $x_0\in\{x\}$, $u_k(x)$ были непрерывны в x_0, то S(x) будет непрерывна в x_0.

<u>Док-во</u> $b_k=u_k(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0}S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)=S(x_0)\ .\bullet$

6. Криволинейный интеграл. Формула Грина.

Опр. Спрямляемая кривая – кривая, имеющая конечную длину, при этом длиной кривой называется предел последовательности длин ломаных, вписанных в эту линию, при условии, что длина наибольшего звена > 0. Этот предел всегда ∃, но может быть = ∞ ⇒ кривая неспрямляемая.

Рассмотрим на плоскости Oxy спрямляемую кривую L, без самопересечений и самоналегания, определяющуюся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b)$$

Будем считать её незамкнутой и ограниченной точками A(ц (a), ш(a)) и B(ц(b), ш(b))

Если на L=AB определены ф-ции f(x,y),P(x,y),Q(x,y) – непрерывные вдоль L(т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall M_1, M_2 \in L$ *длина* $M_1 M_2 < \delta \Rightarrow \left| f(M_1) - f(M_2) \right| < \varepsilon$)

Разобьем [a,b]: $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$, $[t_{k-1},t_k]$ k=1..n.

L распадается на n частичных дуг $M_0M_1\ldots M_{n-1}M_n$, $M_k(x_k,y_k)=(x_k=ц(t_k),y_k=ш(t_k))$

Если $?l_k$ – длина k-той частичной дуги $M_{k-1}M_k$, то: {L –гладкая => ц’, ш’ – непр.}

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

Выберем на всех $M_{k-1}M_k$ точку $N_k(о_k, Ю_k)$: $о_k=ц(ф_k)$, $Ю_k=ш(ф_k) \in [t_k-1, t_k]$

$\Delta = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$ - диаметр разбиения кривой L

Составим 3 интегральные У:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k)\Delta t_k \quad \sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \quad \sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \ ,$$

где $?x_k=x_k-x_{k-1}$, $Ду_k=y_k-y_{k-1}$

Опр. Число I называется <u>пределом интегральной суммы</u> $у_s$ (s=1,2,3), при диам. разб. ?_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0:$ $|y_s-I_s|$<е при ?<д(независимо от выбора N_k)

Опр. Если ∃ предел интегральной суммы $?_1$ при ?_0, то этот предел наз-ся <u>криволинейным интегралом I рода</u> от ф-ции f(x, y) по L и обозначается

$\int_L f(x,y)dl$ или $\int_{AB} f(x,y)dl$ (не зависит от того, в какую сторону пробегается кривая)

Опр. Если ∃ предел интегральной суммы $?_2$ ($у_3$) при ?_0, то этот предел наз-ся <u>криволинейным интегралом II рода</u> от ф-ции P(x, y) (Q(x, y))по AB и обозначается

$\int_{AB} P(x,y)dx$ (соответственно $\int_{AB} Q(x,y)dl$) (зависит от того, в какую сторону пробегается кривая: меняется знак)

$\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy$ - <u>общий интеграл II рода</u> и обозначается $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Опр. Кривая L- <u>гладкая</u>, если на [a,b] ∃ непр. ц'(t), ш'(t), ? в точках a и b обладают конечн. предельн. знач. справа и слева соответственно.

Опр. Особые точки L- соответствующие t: $(ц'(t))^2+(ш'(t))^2=0$

Теорема. Если L – гладкая, без особых точек на [a,b], и, если f, P, Q – непр. вдоль L то все введённые выше интегралы ∃ и вычисляются по формулам:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{AB} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt \quad (1)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_a^b P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt \quad (2)$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_a^b Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt \quad (3)$$

Док-во. Интегралы в правых частях (1),(2),(3) ∃, т.к. все подынтегральные ф-ции непр. на [a,b].

Разобьем [a,b] на n сегментов $[t_{k-1},t_k]$, k=1,2,3..n и составим интегральные суммы $у_1$ и $?_2$.

Учитывая: Дх$_k$=х$_k$-х$_{k-1}$= ц(t$_k$)-ц(t$_{k-1}$)= $\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)dt \Rightarrow$

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n}\{ f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt\}$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n}\{P\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)dt\}$$

Обозначим правые части (1),(2) как I_1,I_2 и представим их в виде суммы интегралов:

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\{ f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)) - f(\varphi(t),\psi(t))\}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$$

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\{P\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)) - P(\varphi(t),\psi(t))\}\varphi'(t)dt$$

из $m = \min\limits_{a\le t\le b}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2} > 0$ и $\Delta l_k \ge m\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}dt = m\Delta t_k \Rightarrow \Delta t_k \le \frac{1}{m}\Delta l_k \Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:$ при ?<д фигурная скобка из у$_1$-I$_1$по модулю < е/l, где l – длина L, а фигурная скобка из у$_2$-I$_2$ по модулю < е/M(b-a), ?где $M = \max\limits_{a\le t\le b}|\varphi'(t)|$

$$|\sigma_1 - I_1| \le \frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt = \frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k = \varepsilon,$$

$$|\sigma_2 - I_2| = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)dt \le \frac{\varepsilon}{M(b-a)}M\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k = \varepsilon$$

Аналогично для ?$_3$._

Опр. L – кусочно-гладкая, если она непр. и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых гладкая кривая.

Замечание1. Если L – замкнутая, то контур обходится в положительном напр. (против часовой стрелки)

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Замечание2(Свойства).

1. $\int\limits_{AB}[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dl = \alpha\int\limits_{AB}f(x,y)dl + \beta\int\limits_{AB}g(x,y)dl$
2. Если AB=AC+CB $\Rightarrow$ $\int\limits_{AB}f(x,y)dl = \int\limits_{AC}f(x,y)dl + \int\limits_{CB}f(x,y)dl$
3. $|\int\limits_{AB}f(x,y)dl| \le \int\limits_{AB}|f(x,y)dl|$
4. Существует M: $\int\limits_{AB}f(x,y)dl = lf(M)$, где l – длина L.

Формула Грина.

Пусть ? – плоскость в E^3, $\vec{k}$ – ед. вектор нормали к ?. D – односвязная обл. на ? и удовл.:

1) $\partial D = C$ -замкнутая, кусочно-гладкая кривая без особых точек.
2) на ? ∃ декартова прямоугольная система координат: все прямые ||(паралельн) Ox и Oy пересекают C не более чем в 2-х точках.

$\vec{t}$ -единичный вектор касательной к кривой C, согласованный с $\vec{k}$ (правило буравчика).

Теорема. Если $\vec{a}$ - векторное поле, дифференцируемое в D, удовл. 1),2), и такое, что его производная по ∀ направлению непрерывна в $D\bigcup C = \overline{D} \Rightarrow$

$$\iint\limits_D(\vec{k}, rot\,\vec{a})d\sigma = \oint\limits_C(\vec{a},\vec{t})dl$$

Док-во. Все интегралы ∃, т.к. все ф-ции непр. Поскольку $(\vec{k}, rot\,\vec{a})$ и $(\vec{a},\vec{t})$ инвариантны относительно системы координат, то достаточно док-ть в некоторой специальной системе коорд..

Выберем Oxyz: выполняется 2), ось Oz направлена вдоль $\vec{k}$, $\vec{a}$ ={P,Q,R}, $\vec{t}$ ={cos α, cos β, 0} R(x,y)≡0

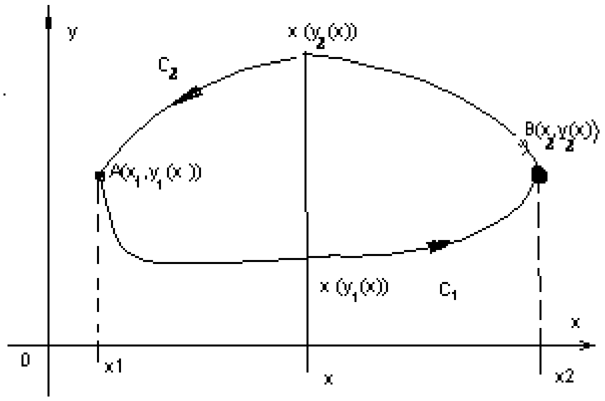
$$rot\ \vec{a} = rot\ \vec{a}\,|_{ОНБ} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

$$(\vec{k}, rot\ \vec{a}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (\vec{a}, \vec{t}\,) = P\cos\alpha + Q\sin\alpha$$

$$\iint_D (\vec{k},\ rot\ \vec{a})d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C \big(P\cos\alpha + Q\sin\alpha\big)dl = \oint_C Pdx + Qdy$$

(т.к. dx=2*l*cosα, dy=2lsinα)

Докажем, что:



$$I = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_C Pdx \quad J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_C Qdy$$

$$I = -\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_2(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} P($$

$$= \int_{C_1} Pdx - \left(-\int_{C_2} Pdx \right) = \oint_C Pdx$$

Аналогично вычисляется Q

7. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция

Опр. *Пусть в области J компл. переменной z задана функция f(z). Если для точки $z_0 \in J$, $\exists$ при $\Delta z \to 0$ предел разностного отношения* $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ *,то этот предел называется **производной** функции f(z) по комплексной переменной z в точке z_0.* $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ *(1)*

Теор. *(Условие Коши-Римана)Если функция $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ диф-ма в точке $z_0 = x_0 + i\, y_0$, то в точке (x_0,y_0) $\exists$ частные производные функций u(x,y) и v(x,y) по переменным x, y. Причем*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \qquad (2)$$

Док-во:По условию теоремы $\exists$ предел (1), не зависящий от способа стремления Δz к нулю.

Пусть $\Delta z = \Delta x$. $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$.

Из существования предела комплексного выражения следует существование пределов его действительной и мнимой частей. Следовательно, в (x_0,y_0) $\exists$ частная производная по x функций u(x,y) и v(x,y), и

$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+i\cdot v_x(x_0,y_0)$.

Положим $\Delta z = i\,\Delta y$. Следов-но, $f'(z_0)=-i\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}+\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y}$ *Ч.ит.д.*

$=-iu_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0)$

Теор. *Если в точке (x_0,y_0) функции u(x,y) и v(x,y) диф-мы, а их частные производные связаны соотношениями (2), то функция* $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ *является диф-мой функцией комплексного переменного z в точке $z_0 = x_0 + i\, y_0$.*

Док-во: $u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)=u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y+\xi(x,y)$,

$v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)=v_x(x_0,y_0)\Delta x+v_y(x_0,y_0)\Delta y+\eta(x,y)$ *и* $\lim\limits_{|\Delta z|\to 0}\frac{\xi(x,y)}{\Delta z}=0$, $\lim\limits_{|\Delta z|\to 0}\frac{\eta(x,y)}{\Delta z}=0$. $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y+\xi(x,y)+i(v_x(x_0,y_0)\Delta x+v_y(x_0,y_0)\Delta y+\eta(x,y))}{\Delta x+i\Delta y}=$ *где* $\frac{\zeta(z)}{\Delta z}\xrightarrow[\Delta z\to 0]{}0$. *Значит, $\exists$*

$=u_x(x_0,y_0)\frac{\Delta x+i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+v_x\frac{i\Delta x-\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\xi(x,y)+i\eta(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\frac{\zeta(z)}{\Delta z}$

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$. *Следовательно, f(z) дифф-ма в точке z_0.*

Опр. *Если функция f(z) диф-ма во всех точках некоторой области J, а ее производная непрерывна в этой области, то функция f(z) называется **аналитической** в области J.*

Из теорем 1 и 2 следует*, что для аналитичности функции $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ в области J необходимо и достаточно сущ-е непрер. частных производных функций u(x,y), v(x,y), связанных условиями Коши-Римана.*

Свойства аналитических функций*:*

1. *Если функция f(z) аналитична в J, то она непрерывна в J.*
2. *Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - аналитичны в J, то их сумма и произведение тоже являются аналитическими функциями в J, а функция* $\varphi(z)=\frac{f_1}{f_2}$ *является аналитической всюду, где $f_2(z) \neq 0$.*
3. *Если $w = f(z)$ является аналитической в J, G - область значений, в G определена аналитическая функция* $\xi=\varphi(\omega)$*, тогда функция $F(z) = \varphi[f(z)]$ является аналитической функцией комплексного переменного z в области J.*
4. *Если $w = f(z)$ является аналитической функцией в J, причем $|f'(z)| \neq 0$ в окрестности точки $z_0 \in J$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ области G определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией комплексного переменного w. При этом* $f'(z_0)=\frac{1}{\varphi'(\omega_0)}$.

Значение функции f(z), аналитической в J, ограниченной Γ и непрерывной в $\bar{J}$, во внутренних точках этой области равно

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$

Существует производная любого порядка у функции f(z): $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$.

8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости

Опр. *Степенным рядом называется функциональный ряд вида*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots$ *- вещественные числа, называемые коэффициентами ряда.*

Любой степенной ряд сходится в точке x = 0.

Рассмотрим последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, *n = 1,2,…* *(2).*

Если последовактельность (2) ограничена, то у нее ∃ конечный верхний предел, равный L, причем L ≥ 0 (т.к. элем. неотр.).

Теор. *(Коши-Адамара)*

1. *Если последовательность (2) неогр., то степенной ряд (1) сходится лишь при x = 0.*
2. *Если последовательность (2) ограничена и имеет верхний предел L > 0, то ряд (1) абсолютно сходится для ∀x: |x| < 1/L и расходится для ∀x: |x| > 1/L*
3. *Если L = 0, то ряд (1) сходится ∀x.*

Док-во:

1. *Пусть (2) не ограничена, тогда* ∀x ≠ 0 $|x|\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ *тоже не ограничена, то есть у этой последовательности имеются члены со сколь угодно большими номерами n:* $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$, *или* $|a_n x^n| > 1$.

   Следовательно, для (1) нарушено начальное условие сходимости ряда.
2. *А) Фиксируем ∀x: |x| < 1/L. Тогда ∃* $\varepsilon > 0: \ |x| < \frac{1}{L+\varepsilon}$. *В силу свойств верхнего предела все элементы* $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, *начиная с некоторого n, удовлетворяют неравенству:*

   $$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ откуда } \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L+\varepsilon/2}{L+\varepsilon} < 1.$$

   Следовательно, по признаку Коши ряд (1) сходится абсолютно.

   Б) Фиксируем ∀x: |x| > 1/L. Тогда ∃ $\varepsilon > 0: \ |x| > \frac{1}{L-\varepsilon}$

   По определению L из (2) можно выделить сходящуюся к L подпоследовательность, т.е. начиная с некоторого k

   $$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon, \text{ откуда получаем } \sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1.$$

   То есть, $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1$ *- нарушено необходимое условие сходимости ряда.*

   (Необходимое условие сходимости любого ряда: для сходимости ряда необходимо, чтобы последовательность $u_1, \ldots, u_k, \ldots$ *членов этого ряда являлась б.м.)*
3. *Пусть (2) - б.б. последовательность, L = 0, ∀x ≠ 0. Отрицательной предельной точки у (2) нет, следовательно, L = 0 - единственная предельная точка.*

∃ предел (2), равный L, следовательно,

∃n: ∀x $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|a_n|} < 1/2 < 1$

А значит, ряд сходится по Коши.

Теорема полностью доказана.

Опр. *R = 1/L -* ***радиус сходимости***.

Ряд сходится при |x| < R и расходится при |x| > R.

Интервал сходимости: (-R,R).

При x = +R, x = -R поведение не определено (может и сходиться, и расходиться).

9. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье.

Линейное пространство R евклидово, если :

(f, g) — скалярное произведение, $\forall$ f, g $\to$ число
(f, g) = (g, f)
(f+g, h) = (f, h) + (g, h)
(λf, g) = λ(f, g)
(f, f) > 0, если f$\neq$0
(f, f) = 0, если f=0

Линейное (евклидово) пространство бесконечномерное, если в этом пространстве $\exists$ $\forall$ наперёд взятое число ЛНЗ элементов.

Пример: Пространство кусочно непрерывных на [a, b] функций является евклидовым пространством ∞ - й размерности.

Свойства евклидова пространства бесконечной размерности:

$\forall$ f, g : $(f, g)^2 \le (f, f)(g, g)$ — неравенство К.-Б.

$\forall$ f введём норму $\|\cdot\|$: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$

* $\|f\| \ge 0$, равенство $\Leftrightarrow f = 0$;
* $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$;
* $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ — неравенство треугольника

Доказательство :

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g)(f+g)} = \sqrt{(f,f)+2(f,g)+(g,g)} \le \sqrt{(f,f)+2\sqrt{(f,f)(g,g)}+(g,g)} =$$
$$= \sqrt{[\sqrt{(f,f)}+\sqrt{(g,g)}]^2} = \|f\| + \|g\|$$

Определение: f и g ортогональны, если (f, g) = 0.

Определение: Последовательность $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ в R называется ортогональной, если
$\forall i, j : i \neq j, (\psi_i, \psi_j) = 0, \|\psi_i\| = 1$.

Например, в R_0 на [-π, π] : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$

Определение: Ряд Фурье элемента f по ОНС $\{\psi_k\}$ — ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$, где $f_k = (f, \psi_k)$ — коэффициент Фурье функции.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ — n-я частичная сумма ряда Фурье.

Рассмотрим $\forall$ $C_1, \ldots, C_n$ и $\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k$ (*)

$\|f - g\|$ — отклонение f от g.

Теорема 1: Среди всех сумм вида (*) наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f.

Доказательство :

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f, \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k^2(\psi_k, \psi_k) - 2\sum_{k=1}^{n} C_k(\psi_k, f) + (f, f) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|$$

$\Rightarrow$ наименьшее отклонение при $C_k = f_k$.

ч.т.д.

Следствие 1:

$$\forall f \in R, \forall\{\psi_k\}, \forall C_k, \forall n \Rightarrow \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 \quad (1)$$

$\forall f \in R, \forall\{\psi_k\} \Rightarrow \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$ (2) — тождество Бесселя(для док-ва положим $C_k = f_k$)

Определение :ОНС $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если $\forall f \in R, \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ линейная комбинация конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклонение которой от f (по $\| \ \|$) меньше ε.

Теорема 2: $\forall f \in R, \forall OHC\{\psi_k\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$ — неравенство Бесселя

Доказательство :

Левая часть неотрицательна из (2). $\forall n \Rightarrow \sum_{k=1}^{k} f_k^2 \le \|f\|^2 \Rightarrow$ ряд из неотрицательных членов обладает ограниченной последовательностью частичных сумм и поэтому сходится.

ч.т.д

Теорема 3: Пусть $\{\psi_k\}$ — замкнутая ОНС $\Rightarrow$ $\forall f \in R$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$.

Доказательство :

Фиксируем $\forall f$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует n и $C_1, \ldots, C_n$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f \right\|^2 < \varepsilon \Rightarrow \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \ge N$$

$$0 \le \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$$

ч.т.д.

Теорема 4: Если $\{\psi_k\}$ — замкнутая ОНС $\Rightarrow$ $\forall f \ \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| = 0$

Доказательство :

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

ч.т.д.

Определение :ОНС $\{\psi_k\}$ называется полной, если кроме нулевого элемента не существует никакого другого элемента $f \in R \perp \psi_k \forall k$.

Теорема 5: Любая замкнутая ОНС является полной.

Доказательство :

Пусть $\{\psi_k\}$ — замкнутая, пусть f любой элемент принадлежащий R: $f \perp \psi_k \forall k \Rightarrow f_k = 0 \forall k \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow$ f — нулевой элемент.

ч.т.д.

Теорема 6: Для любой полной ОНС $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g ∈ R не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

Доказательство :

Пусть $f_k = g_k \Rightarrow f_k - g_k = 0 \Rightarrow (f-g) \perp \psi_k \forall k \Rightarrow f_k = 0 \forall k \Rightarrow f = g$

ч.т.д.

Пусть R_0 [-π,π], рассмотрим тригонометрическую систему

$$f(x) = \bar{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \bar{\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_0 = \frac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Определение : Функция $f(x)$ имеет период T, если 1) $f(x)$ — определена $\forall$x

2) $f(x+T)=f(x)$

Функция $f(x)$ может быть равномерно приближена на сегменте $[-\pi,\pi]$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ непрерывна на нём и $f(-\pi)=f(\pi)$

10. Прямая и плоскость, их уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости. Основные задачи на прямую и плоскость.

Утверждение 1 : Если на π задана прямая L и фиксирована Oxy, то L определяется в этой системе уравнением 1-ой степени.

Утверждение 2 : Если на π фиксирована Oxy, то любое уравнение 1-ой степени с двумя переменными x и y определяют относительно этой системы координат прямую.

Доказательство : Пусть фиксировано Oxy, $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0 \Rightarrow$ существует (x_0, y_0) : $Ax_0 + By_0 + C = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ (*). Докажем, что это уравнение определяет прямую, проходящую через $M_0(x_0, y_0) \perp$ вектору $n = \{A, B\}$. $M(x, y) \in L$, то её координаты удовлетворяют этому уравнению, т.к. векторы $n = \{A, B\}$ и $\overline{MM_0}$ ортогональны и $A(x - x_0) + B(y - y_0) = (n, \overline{MM_0}) = 0$. Если же точка не лежит на прямой, то её координаты не удовлетворяют (*). ч.т.д.

$L\colon Ax + By + C = 0$ — уравнение прямой, $A^2 + B^2 \neq 0$.

$\vec{n} = \{A, B\}$ — ортогонален L, $\vec{l} = \{B, -A\} \parallel L$

$\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ — уравнение плоскости.

$\vec{n} = \{A, B, C\} \perp \pi$

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей, определяемых уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Или в каноническом виде: уравнение прямой, проходящей через точку $M_1\{x_1, y_1, z_1\} \parallel q(l, m, n)$

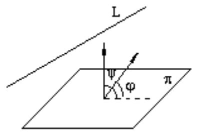
Доказательство : $M_1\{x_1, y_1, z_1\} \in L \Leftrightarrow \overline{M_1M} \parallel q \Leftrightarrow \left(M_1M = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)\right)$

$\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ — уравнение прямой в пространстве. ч.т.д.

Взаимное расположение прямой и плоскости.

$$\left[\begin{array}{l} L\colon \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}; L \parallel \vec{q}(l, m, n) \\ \pi\colon Ax + By + Cz + D = 0; \pi \perp n(A, B, C) \end{array}\right.$$

1. $L \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{q} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$
2. $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow \dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$



3. φ — угол между L и π. $\varphi = \pi/2 - \psi$, ψ — угол между $\vec{n}$ и $\vec{q}$.

$$(\vec{q}, \vec{n}) = |q| \cdot |n| \cdot \cos\psi = \sin\left(\pi/2 - \psi\right) = \sin\psi \Rightarrow \sin\psi = \frac{(\vec{q}, \vec{n})}{|q| \cdot |n|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

4. $L \in \pi \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \to M_1 \in \pi \\ Al + Bm + Cn = 0 \to \vec{q} \parallel \pi \end{cases}$, M_1 — любая точка прямой

Основные задачи на прямую и плоскость.

1. Условие пересечения 3-х прямых в одной точке

$L_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0, L_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0, L_3\colon A_3x + B_3y + C_3 = 0$

Пусть L_1 и L_2 — пересекаются, т.е. существует $M(x^*, y^*)$:

$A_1x^* + B_1y^* + C_1 = A_2x^* + B_2y^* + C_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_1x^* + B_1y^* = -C_1 \\ A_2x^* + B_2y^* = -C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^*, y^*)$ — т. пересечения $\Leftrightarrow$ x^*, y^* — решение системы уравнений, т.е. $\det\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow L_1, L_2, L_3$ пересекаются $\Leftrightarrow$ L_3 проходит через $M(x^*, y^*)$ $\Leftrightarrow L_3\colon \alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = -\gamma A_3x + (-\gamma)B_3y + (-\gamma)C_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0 \\ \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3 = 0 \\ \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

2. Условие пересечения 3-х плоскостей в одной и только одной точке

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

3. Уравнение прямой, проходящей через т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной π: $Ax + By + Cz = 0$

$$\vec{q} = \vec{n} \Rightarrow \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

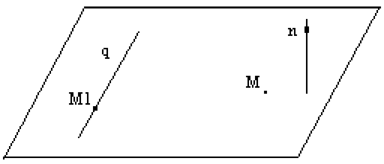
4. Уравнение плоскости, проходящей через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной π: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной прямой L.

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

6. Уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку $M_0 \notin L$



$\begin{cases} A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$ — условие о принадлежности прямой данной плоскости. $\Rightarrow$ наруш. одно из условий $\frac{x_1 - x_0}{l} = \frac{y_1 - y_0}{m} = \frac{z_1 - z_0}{n}$, выразим А, В через С, затем дадим С любое значение.

7. Уравнение плоскости, проходящей через M_1, M_2, M_3, не лежащих на одной прямой

$M \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M}$ — компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение равно 0 $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

11. Алгебраические линии и поверхности второго порядка, канонические уравнения, классификация

__Определение__ : Уравнение линии 2-го порядка имеет вид $F(x,y)=0$ *, где* $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$ *, при этом* $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2=0$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23}\end{pmatrix}\ F(x,y)=x^TAx+2b^Tx+a_{33}=0.$$

Обозначим $I_1=trA=a_{11}+a_{22}$, $I_2=|A|$, $I_3=|B|$, *где* $B=\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & a_{33}\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$.

I_1, I_2, I_3 *являются инвариантами линий 2-го порядка относительно преобразований декартовой системы координат. Геометрические характеристики линий 2-го порядка определяются значениями инвариантов* I_1, I_2, I_3.

__Теорема__ : Переносом начала координат и поворотом плоскости уравнение $F(x,y)$ *можно привести к одному их следующих типов :* I. $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+a_0=0$ $(I_2\neq 0)$

II. $\lambda_2y^2+b_0x=0$ $(I_2=0, I_3\neq 0)$

III. $\lambda_2y^2+c_0=0$ $(I_2=0, I_3=0)$

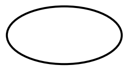
__Определение__ : Уравнения I-III типа называются приведёнными уравнениями линий 2-го порядка на плоскости.

Алгебраические линии 2-го порядка

__I тип__ : $I_2\neq 0$, $I_3=\lambda_1\lambda_2a_0$ $I_1=\lambda_1+\lambda_2$, $I_2=\lambda_1\lambda_2$, $I_3=\lambda_1\lambda_2a_0$

1. *Линии эллиптического типа.* $\lambda_1\lambda_2>0$ $(I_2>0)$

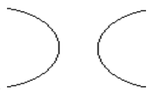
а) $\lambda_1\lambda_2a_0<0$, $I_3<0$ *, канонический вид* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; *a, b > 0. Эллипс*



б) $\lambda_1\lambda_2a_0>0$, $I_3>0$ *, канонический вид* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$; *a, b > 0. Мнимый эллипс*

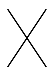
в) $a_0=0$, $I_3=0$ *, канонический вид* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; *a, b > 0. Пара пересекающихся мнимых прямых (ПМП$_x$П)*

2. *Гиперболический тип.* $\lambda_1\lambda_2<0$, $(I_2>0)$



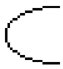
а) $a_0\neq 0$, $I_3\neq 0$ *, канонический вид* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. *Гипербола*

б) $a_0=0$, $I_3=0$ *, канонический вид* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. *Пара пересекающихся прямых (ПП$_x$П)*



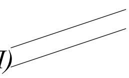
__II тип__ : линии параболического типа

$I_1=\lambda_2$, $I_2=0$, $I3=\lambda_2b_0^2$ *, канонический вид* $y^2=2px$ *, p>0. Парабола.*

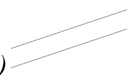


__III тип__ : $I_1=\lambda_1$, $I2=0$, $I_3=0$

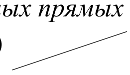
1. $\lambda_2C_0<0$*, канонический вид* $y^2=a^2$. *Пара параллельных прямых (ПП$_{||}$П)*



2. $\lambda_2C_0>0$*, канонический вид* $y^2=-a^2$. *Пара мнимых параллельных прямых (ПМП$_{||}$П)*



3. *$C_0=0$, канонический вид $y^2=0$. Пара слившихся прямых (ПСП)*



__Алгебраические поверхности 2-го порядка__

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0\ (2)$$

Инварианты :

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},\ I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11}\end{vmatrix},\ I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},\ I_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c\end{vmatrix}$$

__Теорема :__ С помощью параллельного переноса и плоских вращений уравнение (2) можно привести к одному и только одному из следующих видов:

I. $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+a_0=0$ $(I3\neq 0)$

II. $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+b_0z=0$ $(I3=0)$

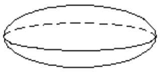
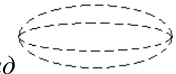
III. $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+c_0=0$

IV. $\lambda_2 y^2 + p_0 x = 0$

V. $\lambda_2 y^2 + q = 0$

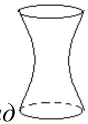
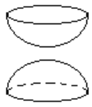
<u>I тип</u>: $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$

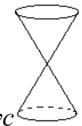
1)

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *— элипсоид*  *б)* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ *— мнимый элипсоид* 

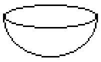
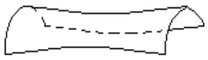
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ *—вырожденный элипсоид.* •

2)

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *-однополостный гиперболоид*  *б)* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *—двухпол. гиперболоид* 

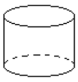
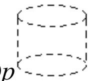
в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ *— эллиптический конус* 

<u>II тип</u>: $I_3=\lambda_1\lambda_2 b_0\neq 0$

1) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ *— эллиптич. параболоид*  $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ *— гиперболич. -||-* 

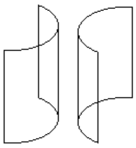
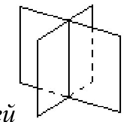
<u>III тип</u>:

1)

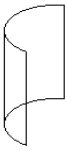
а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *— эллиптич. цилиндр*  *б)* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ *— мнимый эллиптический цилиндр* 

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ *— вырожденный цилиндр* •

2)

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *- гиперболич. цилиндр*  *б)* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ *- пара пересек-ся плоскостей* 

<u>IV тип</u>:

$\lambda_2 y^2 + p_0 x = 0: y^2 = 2px, p>0$ *— параболический цилиндр* 

<u>V тип</u>:

1) $\lambda_2 q_0 < 0: y^2 = a^2$ *— пара параллельных плоскостей*
2) $\lambda_2 q_0 > 0: y^2 = -a^2$ *— пара мнимых параллельных плоскостей*
3) $q_0 = 0: y^2 = 0$ *— пара совпадающих параллельных плоскостей*

12. Система Линейных Алгебраических Уравнений

ax + ax + ... +ax = b совместна, если $\exists$ решение

...

ax + ax + ... +ax = b совместно определенна , если $\exists$! решение

Ax = b ; Ax=0 - однородная система ($\exists$ нетривиальное решение)

Утв. Однородная система имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow$ rg (A)< n

Т. Кронеккера-Капелли : система совместна $\Leftrightarrow$ rg[A|b] = rg A

Док-во:

$\Rightarrow$ СЛАУ совместна $\Rightarrow \exists$ c_1, c_2, ...c_n : a_{i1}+...$a_{in}c_n$ $\Rightarrow$ rg[A|b] = rg A

$\Leftarrow$ Пусть rg[A|b] = rg A = r $\Rightarrow\exists$ r базис столбцов в A , он является базисом и для [A|b] следовательно b - линейная комбинация.□

Ax = b ; $A\in R^{nxn}$; $|A|\neq 0$ $\Rightarrow$СЛАУ совместна и $\exists$ единственное решение.

13. Линейный оператор в конечном пространстве , его матрица.

Опр. Пусть даны 2 линейных пространства V и W над общим полем P.

Отображение $A:V\to W$ называется линейным отображением , если

1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$

2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

$\forall$ x, y $\in$ V , $\forall$ a$\in$P

$\alpha(V,W)$ - множество всех линейных операторов действующих из V в W.

Теорема: $e_1, e_2,\dots e_n$ - базис в V ; $g_1, g_2,\dots g_n$ - $\forall$ вектора в W $\Rightarrow \exists$ $A\in\alpha(V,W)$: $\forall$ i=1..n $Ae_i = g_i$

Доказательство

$\exists$: $\forall$ x $= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; A: x$\to$ $\sum x_i g_i$ $\Rightarrow$Ax = $\sum_{i=1}^{n} x_i g_i$

! : Пусть $\exists$ $B\in\alpha(V,W)$: $Be_i = g_i \Rightarrow Bx = B(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i Be_i = \sum x_i g_i = Ax$ □

Определение:

$Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 +\dots a_{m1}f_m$

...... $\Leftrightarrow A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$ i=1..n

$Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f +\dots a_{mn}f$

матрицы линейного оператора A в базисе векторов e и f

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение :

$A\in\alpha(V,W)$ образом im A = { $y\in W$| $\exists x\in V$: Ax= y}

ядром ker A = {$x\in V$| Ax = 0}

Определение:

Нормой ЛО $\|A\| = \sup_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_W$

14. Ортогональные преобразования евклидова пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.

Опр. E - евклидово пространство, если $Dx, y \to (x,y):(x,y)=(y,x);(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;

Опр. Линейный оператор $P \in L(v,v)$ - ортогональный, если $\forall x,y \in V:(Px,Py)=(x,y)$

Теорема P - ортогональный $\exists P^{-1}: P^{*}=P^{-1}\left\{(Px,y)=(x,P^{*}y)\right\}$.

Доказательство: $(\Rightarrow)$ $(Px,Py)=(P^{*}Px,y)=(x,y)\Rightarrow((P^{*}P-I)x,y)=0$.

фиксируем $x,\forall y \Rightarrow (P^{*}P-I)x=\varnothing \Rightarrow P^{*}P=I$.

$(\Leftarrow)$ $PP^{*}=P^{*}P=I\Rightarrow(Px,Py)=(x,P^{*}Py)=(x,Iy)=(x,y)$.

Опр. Матрица A - ортогональная, если $A^{\tau}A=AA^{\tau}=I$.

Утв. $]\{e_i\}$ о/н базис в $V \Rightarrow P$ - ортогональный $\Leftrightarrow$ ортогональна его матрица в $\{e_i\}$: $(e_i,e_j)=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$

(собственные значения по мод. = 1)

Доказательство:

$\dim=1: x=\alpha e, \alpha\in R\Rightarrow Pe=\lambda e$ $(Pe,Pe)=\left\{\lambda^2(e,e)\right\}=(e,e)\Rightarrow\lambda=\pm1$

$\Rightarrow \exists P_{+}x=x$ *и* $P_{-}x=-x$ - *два ортогональных преобразования.*

$$\dim=2: P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}; PP^{\tau}=P^{\tau}P=I\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\a^2=d^2\\b^2=c^2\\ac+bd=0\\ab+cd=0\end{cases}$$

$$\left]\begin{matrix}a=\cos\varphi\\b=\sin\varphi\end{matrix}\right.;\ P_{\pm}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \pm\sin\varphi & \pm\sin\varphi\end{pmatrix};\det P_{\pm}=\pm1;$$

P_{+} - *собственная матрица - поворот на* φ

P_{-} - *несобственная матрица - поворот на* φ *и отражение.*

$\dim=n$:

$\{e_i\}$

$$\begin{bmatrix}1 &&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&\\ &&1&&&&&\\ &&&-1&&&&\\ &&&&\ddots&&&\\ &&&&&-1&&\\ &&&&&&\cos\varphi & -\sin\varphi &\\ &&&&&&\pm\sin\varphi & \pm\sin\varphi &\\ &&&&&&&&\ddots\end{bmatrix}$$

$\forall$ *оператора в вещественном пространстве* $\exists$ *одномерное либо 2-х мерное инвариантное подпространство*

λ_0

$\lambda_0=a+bi$

$\Rightarrow$*действие ортогонального оператора в ортонормированном базисе - последовательные повороты и отражения.*

15. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы.

$]\mathrm{A} \in L(V,V)$ - л.о.

<u>Опр.</u> λ - собственное значение A, если $\exists x$ - собственный вектор $(x \neq 0): \mathrm{A}x = \lambda x$

<u>Опр.</u> $|\mathrm{A} - \lambda I|$ - характеристический многочлен оператора A

уравнение $\det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$ - характеристическое уравнение оператора A

<u>Теорема.</u> λ - собственное значение $\Leftrightarrow$ λ -корень характеристического уравнения.

<u>Доказательство</u> $(\Rightarrow)\lambda$ - собственное значение, $\exists x: \mathrm{A}x = \lambda x, x \neq 0$ $(\mathrm{A} - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \ker(\mathrm{A} - \lambda I) \neq 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \dim(\ker(\mathrm{A} - \lambda I)) \geq 1 \\ \dim(\ker(\mathrm{A} - \lambda I)) + \dim(\mathrm{im}(\mathrm{A} - \lambda I)) = n \end{array}\right| \Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\mathrm{A} - \lambda I)) \leq n-1 \Rightarrow (\mathrm{A} - \lambda I) < n \Rightarrow \det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$$

$(\Leftarrow)\exists\lambda$ - корень характеристического уравнения. $\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\mathrm{A} - \lambda I)) \leq n-1 \Rightarrow \dim(\ker(\mathrm{A} - \lambda I)) \geq 1$

$\Rightarrow \exists x: (\mathrm{A} - \lambda I)x = 0$ ч.т.д.

<u>Следствие:</u> $\forall$ линейный оператор имеет собственные значения.

<u>Теорема.</u> Характеристический многочлен подобных матриц совпадает.

<u>Доказательство</u> $\mathrm{A} = C^{-1}BC \Rightarrow |\mathrm{A} - \lambda I| = |B - \lambda I|$

$$|\mathrm{A} - \lambda I| = |C^{-1}BC - \lambda I| = |C^{-1}(B - \lambda I)C| = |C^{-1}||B - \lambda I||C| = |B - \lambda I|$$

16. Формализация понятия алгоритма(машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова). Алгоритмическая неразрешимость.

Опр. *Алгоритм* - это строгая и четкая конечная система правил, которая определяет последовательность действий над некоторыми объектами и после конечного числа шагов приводит к достижению поставленной цели.

Это интуитивное понятие, так как не известно, например, что есть “объект” $\Longrightarrow$ Для формализации понятия алгоритма естественно начать с формализации понятия объекта. Можно считать, что алгоритм имеет дело не с объектами реального мира, а с изображениями этих объектов $\Longrightarrow$Объекты реального мира можно изображать словами в различных алфавитах.
Опр. *Алфавит* - конечная совокупность букв, буква - $\forall$ знак. Слово - $\forall$ конечная последовательность букв из алфавита.
$\Longrightarrow$*Алгоритм* - четкая конечная система правил для преобразования слов из некоторого алфавита в слова из этого же алфавита. Входные и выходные слова. Алгоритм может быть применим не ко всем словам из алфавита.
Формализованные действия над словами и порядок этих действий.
Машина Тьюринга(1936) - гипотетическая машина. Алгоритм - это то, что умеет делать эта машина. Если что-то не может быть сделано МТ, то это уже не алгоритм. С помощью МТ можно доказать $\exists$ или $\neg\exists$ алгоритмов решения различных задач. МТ - бесконечная лента, разделенная на ячейки, автомат, программа. В ячейке находится одна буква из алфавита. Автомат может двигаться вдоль ленты и по очереди обозревать содержимое ячеек. Он может находиться в одном из нескольких состояний $q_1,\dots,q_k$. В зависимости от того, какую букву s_i автомат видит в состоянии q_j , то есть от пары $\left(s_i,q_j\right)$ автомат может выполнить следующие действия:

- запись новой буквы в обозреваемую ячейку.
- сдвиг влево или вправо на одну ячейку.
- переход в новое состояние.

	Λ_i	s_1	$\cdots$	s_n
q_1				
$\vdots$			??	
q_k				

Задание для работы МТ можно изображать программой (процедурой?) Входным словом является слово, которое первым было на ленте. То, что получилось на ленте после останова - выходное слово. Если МТ не останавливается, то считается, что она не применима к данному входному слову. Применима $\Leftrightarrow$ если начав работу над входным словом она остановится.
<u>*Алгоритм*</u> - это то, что может быть реализовано МТ.
С помощью МТ можно строить различные композиции алгоритмов. Если алгоритмы A и B реализуются МТ, то можно реализовать например выполнение A, если появилось “да”, то выполнять B, иначе не выполнять. Тьюринг выдвинул тезис: “ $\forall$ алгоритм может быть реализован соответствующей МТ.” Этот тезис есть формализованное определение алгоритма, доказать тезис нельзя, так как не определено понятие “ $\forall$ алгоритм”.
Описываемый способ интерпретации работы МТ сам является алгоритмом. Ему соответствует некоторая МТ, в которой входное слово состоит из изображения программы и входного слова интерпретируемой машины. Такая МТ называется универсальной. После завершения работы универсальной МТ на ее ленте должно остаться то слово, которое получилось бы в результате работы интерпретируемой машины.
<u>*Нормальные алгоритмы Маркова*</u> (1954). Нет понятия ленты и подразумевается непосредственный доступ к $\forall$ частям преобразуемого слова. Эту схему он назвал нормальным алгоритмом.]A,B - слова в некотором алфавите. Нормальный алгоритм можно записать в следующем виде:

$$A_1\begin{Bmatrix}\to\\ \mapsto\end{Bmatrix}B_1$$

$$A_2\begin{Bmatrix}\to\\ \mapsto\end{Bmatrix}B_2$$ Каждая пара - формула подстановки для замены подслов в преобразуемом слове. Ищется вхождение слова

$\dots\dots\dots\dots$

$$A_n\begin{Bmatrix}\to\\ \mapsto\end{Bmatrix}B_n$$

A_1 в исходное слово. Если нашли, то заменяем его на B_1, если нет, то ищем A_2 и так далее. Затем возвращаемся в начало и снова ищем вхождение A_1. Процесс заканчивается, если ни одна из подстановок не применима, либо применилась завершающая формула, в которой $\mapsto$.

Доказано, что алгоритмические схемы Маркова и Тьюринга эквивалентны. Основная гипотеза Маркова: $\forall$ алгоритм нормализуем.

В теории алгоритмов известны задачи, для которых доказано, что для их решения $\neg\exists$ алгоритма. Такие задачи называются алгоритмически неразрешимыми. Проблема распознавания самоприменимости. *Самоприменимые алгоритмы* - это алгоритмы, которые, начав работу над собственным описанием останавливаются. Если же зацикливаются, то такой алгоритм называется несамоприменимым.

Задача найти общий алгоритм, который для $\forall$ алгоритма отвечал бы на вопрос, самоприменим ли он.

Докажем, что такой алгоритм $\neg\exists$.

Доказательство.] $\exists$ такой алгоритм А. Р - $\forall$ алгоритм.

А(запись Р)

$$\Rightarrow \begin{cases} C, & \text{если P самоприменим,} \\ H, & \text{если P несамоприменим.} \end{cases}$$

] В - алгоритм: увидев С- зацикливается, увидев Н - останавливается.

	Λ	C	H
q_1	C, q_1	Λ, q_1	!

- МТ.

Алгоритм В $\exists$, так как записали для него МТ. Если $\exists$ А и В, то $\exists$ К = АВ, то есть алгоритм, который выполняет сначала А, а потом В.

Докажем, что К $\neg\exists$, доказав, что он не может быть ни самоприменимым, ни несамоприменимым.

Рассмотрим применение К к его собственной записи.

] К - самоприменим $\Rightarrow$ А(запись К) $\Rightarrow$С, но В зацикливается $\Rightarrow$К - несамоприменим.

] К - несамоприменим $\Rightarrow$ А(запись К) $\Rightarrow$Н, и В останавливается $\Rightarrow$К - самоприменим.

$\Rightarrow$К $\neg\exists$, но В $\exists$ $\Rightarrow$ $\neg\exists$ А.

17. Структура и состав вычислительной системы (аппаратура + программное обеспечение)

Вычислительная система

Интеграция аппаратуры и ПО, построенная для решения некоторого класса задач.

Вычислительная система как иерархия уровней

|---

| Прикладной уровень

|---

| Уровень систем программирования

|---

| Управление виртуальными логическими ресурсами.

|

| Унификация доступа к ресурсам

|---

| Управление физическими ресурсами

|

| Предоствляет стандартный способ доступа к физическим ресурсам.

|---

| Аппаратура

|

| Набор доступных физических ресурсов, правила программного использования. Ограничения.

|---

Вычислительная система как набор уровней со все более виртуальными ресурсами и способами доступа к ним.

Виртуальный ресурс - тот, часть / все характеристики которого реализованы программно.

18. Основные компоненты архитектуры ЭВМ (процессор, устройства памяти, внешние носители)

Основные из традиционных принципов построения ЭВМ, сформулированные фон Нейманом, следующие:

- наличие единого вычислительного устройства, включающего процессор, средства передачи информации и память;
- линейная структура адресации памяти, состоящей из слов фиксированной длины;
- двоичная система исчисления;
- централизованное последовательное управление;
- хранимая программа;
- неотличимость данных от инструкций
- низкий уровень машинного языка;
- наличие команд условной и безусловной передачи управления;
- АЛУ с представлением чисел в форме с плавающей точкой.

В современных ЭВМ не обязательно выполняются все принципы Фон Неймана:

- Бывают ЭВМ с троичными системами счисления
- На некоторых мобильных платформах инструкции отличаются от данных
- Ввод/вывод производится не через АЛУ
- Более одного УУ, более одного АЛУ (или подобной аппаратуры)

Одна из возможных архитектур ЭВМ:

19. Операционные системы, основные функции. Типы операционных систем.

(Машечкин) **Операционная система** - программа управления ресурсами вычислительной системы. В то же время ОС является частью ВС (?).

(Википедия) Существуют две группы **определений ОС**: «совокупность программ, управляющих оборудованием» и «совокупность программ, управляющих другими программами»

Принципиально, ОС не является необходимой частью вычислительной системы. Программное опеспечение вычислительной системы может само управлять ресурсами и не быть ОС.

ОС служат для управления ресурсами и выполнения прикладных программ.

Состав ОС:

- Ядро (монолитное / микроядро)
- Специальные программы - драйвера физических устройств, драйвера логических устройств
- Файловая система

Типы ОС:

- Пакетные. Программы выполняются последовательно.
- Разделения времени. Эмуляция выполнения нескольких программ одновременнно. Необходимые условия:
    - Наличие защищенного режима
    - Прерывания
    - Защита памяти
- Реального времени
- Сетевые ОС - пользователи могут получить доступ к ресурсам другого сетевого компьютера, только они должны знать об их наличии и уметь это сделать.
- Распределенная система - внешне выглядит как обычная автономная система, однако управляет более чем одной вычислительной системой.

Функции ОС (в зависимости от типа - свои функции):

- Интерфейс для прикладных программ
- Организация очереди из заданий в памяти и выделение процессора одному из заданий потребовало планирования использования процессора.
- Переключение с одного задания на другое требует сохранения содержимого регистров и структур данных, необходимых для выполнения задания, иначе говоря, контекста для обеспечения правильного продолжения вычислений.
- Поскольку память является ограниченным ресурсом, нужны стратегии управления памятью, то есть требуется упорядочить процессы размещения, замещения и выборки информации из памяти.
- Организация хранения информации на внешних носителях в виде файлов и обеспечение доступа к конкретному файлу только определенным категориям пользователей.
- Поскольку программам может потребоваться произвести санкционированный обмен данными, необходимо их обеспечить средствами коммуникации.
- Для корректного обмена данными необходимо разрешать конфликтные ситуации, возникающие при работе с различными ресурсами и предусмотреть координацию программами своих действий, т.е. снабдить систему средствами синхронизации.

20. Парадигмы программирования (функциональное, императивное, объектно-ориентированное)

Парадигма программирования - семейство обозначений, рекомендаций и идей, определяющих общий способ (методику) реализации программ

Функциональная парадигма - процесс вычисления как получение значения (результата) математически описанной функции. Комбинация вызовов функций того же или более низкого уровня. Каждая следующая функция в этой комбинации описывается аналогичным образом, до тех пор, пока описание не сведётся к предопределённым функциям, вычисление которых считается заданным. Вычисление функции не имеет побочного эффекта кроме возвращеня результата.

Язык Lisp - почти оно.

Пример вычисления факториала: главная_функция (входное_число) = умножить(входное_чило , главная функция (минус (входное_число , 1)))

Императивная парадигма - процесс вычисления в виде инструкций, изменяющих состояние программы. Последовательность команд, которые должен выполнить компьютер.

Пример:

a = 1

c = a + входное_число

вывод c

Объектно-ориентированная парадигма - в которой основными концепциями являются понятия объектов и классов.

Класс — это тип, набор методов и свойств. Класс можно сравнить с чертежом, согласно которому создаются объекты. Пограмма - набор классов. Выполнение программы - взаимодействие множества объектов (экземпляров классов) с помощью обмена сообщениями.

Принципы:

- Абстракция - Объекты представляют собою упрощенное, идеализированное описание реальных сущностей предметной области
- Инкапсуляция - класс - черный ящик, он скрывает детали своей реализации. Известен лишь интерфейс, способ работы с ним (методы и свойства).
- Наследование - порождение нового класса от другого с сохранением/изменением свойств и методов класса-предка
- Полиморфизм - один и тот же программный код выполняется по-разному в зависимости от того, объект какого класса используется при вызове данного кода

Концепции:

- Система состоит из объектов
- Объекты некоторым образом взаимодействуют между собой
- Каждый объект характеризуется своим состоянием и поведением
- Состояние объекта задаётся значением полей данных
- Поведение объекта задаётся методами

Пример:

класс Main { поле-типа-А м, метод main (м = новый объект класса А; м.Изменить())}

класс А { поле-число x, поле-число y, метод Изменить (x = 1)}

21. --

22. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению.

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y)$$
$$y(0) = y_0$$

Рассмотрим систему: *(1)* ***y – n-мерная вектор функция***

с компонентами y1,…,yn

<u>Определение.</u> Решение y=y(t,y0) задачи (1) называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) :| \Delta y_0 |< \delta, || y(t, y_0 + \Delta y_0) ||< \varepsilon, t > 0$$

<u>Определение.</u> Решение y=y(t,y0) задачи (1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того $\exists \delta_0 > 0 :|| \Delta y_0 ||< \delta_0, \lim\limits_{t \to \infty} || y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0) ||= 0$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), f(t, x) = F(t, x + y(t, y_0)) - \frac{d}{dt} y(t, y_0)$$

Перейдем от у к х: x=y-y(t,y0), $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{d(y(t, y_0))}{dt}$ ***, тогда получим систему***

(2)

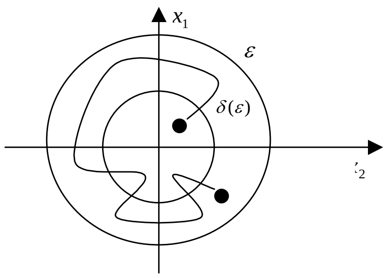
Решению $y(t, x_0)$ ***отвечает решение*** $x \equiv 0$

Обозначим $\begin{aligned} x_0 &= y(0, y_0 + \Delta y_0) - y(0, y_0) = \Delta y_0 \\ x(t, x) &= y(t, y_0 + \Delta y_0) - y(t, y_0) \end{aligned}$

<u>Определение.</u> Тривиальное решение системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \| x_0 \| < \delta, \| x(t, x_0) \| < \varepsilon$$

<u>Определение.</u> Тривиальное решение системы (2) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и,



кроме того $\exists \delta_0 > 0 : \| x_0 \| < \delta_0, \lim_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0$

<u>Устойчивость по первому приближению:</u>

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n), i = \overline{1, n}$$

Рассмотрим *(3)*

(f не зависит от t – автономная система)

Разложим по теореме Тейлора $f_i(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_r+R_{(2)k}$

$$a_{ik}=\frac{\partial f_i(0,\ldots,0)}{\partial x_n}$$

$$R_{(2)k}=\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_l}(\theta_{x_1},\ldots,\theta_{x_n})x_jx_l$$

<u>Определение.</u> Система $\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_r,\ i=\overline{1,n}$ ***(4) называется системой первого приближения для системы (3).***

<u>*Теорема1.*</u> ***Пусть в некоторой окрестности точки x(0,…,0) функции*** $f(x_1,\ldots,x_n),i=\overline{1,n}$ ***непрерывны вместе с производными до 2-го порядка включительно. Тогда, если все характеристические числа*** λ_i ***матрицы с элементами*** $a_{ik}=\frac{\partial f_i}{\partial x_r}|_{\bar{x}=0}$ ***удовлетворяют условию*** $\operatorname{Re}\lambda_i<0$***, то тривиальное решение системы устойчиво, причем асимптотически.***

<u>*Лемма 1.*</u> ***Имеют место следующие утверждения:***

1) ***Пусть y – вектор с компонентами*** $y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)x_k,|a_{ik}(t)|<a(t),i=\overline{1,n}$. ***Тогда*** $\|y\|<Ca(t)\|x\|$

2) ***Пусть y – вектор с компонентами*** $y_i=\sum_{k,j=1}^{n}a_{il_j}(t)x_jx_l,|a_{il_j}(t)|<a(t),i=\overline{1,n}$. ***Тогда*** $\|y\|<Ca(t)\|x\|^2$

3) $\forall x,y:\ \|x+y\|\le C(\|x\|+\|y\|)$

4) $\forall y:\ \|\int_0^t y\,d\xi\|\le C\int_0^t\|y\|\,d\xi$

5) ***Для матрицианта*** $K(t,\xi)$ ***линейной системы (4) справедливо неравенство*** $|K_{ij}(t,\xi)|<Ce^{(p+\gamma)(t-\xi)}$***, где*** $p=\max\limits_{i=1,n}(\operatorname{Re}\lambda_i),\gamma>0$ ***Const.***

<u>Определение.</u> $K(x,x_0)=W(x)W^{-1}(x_0)$***, где W(x) – фундаментальная матрица системы.***

<u>*Доказательство:*</u>

1) ***Для 2-х мерного случая*** $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\Rightarrow y^2\le a_{11}{}^2x_1{}^2+a_{12}{}^2x_2{}^2+|a_{11}||a_{12}|(x_1{}^2+y_2{}^2)\le 2a^2(x_1{}^2+x_2{}^1)$,

Т.е. $y_1{}^2+y_2{}^2<4a^2(x_1{}^2+x_2{}^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -dz + Cz^2, \\ z(0) = z_0 > C\|x_0\| \end{cases} \qquad z = \frac{\alpha z_0}{Cz_0 + (\alpha - Cz_0)e^{\alpha t}}$$

1) $z > 0, t \geq 0$ ***, если*** z_0 ***достаточно мало*** $z_0 < \alpha / C$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\qquad z < \dfrac{\alpha z_0}{Cz_0 + \alpha - Cz_0} = z_0 \Rightarrow z < \varepsilon$ ***, если*** $z_0 < \varepsilon$

3) $z \to 0$ ***при*** $t \to \infty$

Напишем для z(t) интегральное уравнение

$$z = z_0 e^{-\alpha t} + C\int_0^t e^{-\alpha(t-\xi)} z^2 d\xi$$

Убедимся, что при $t \geq 0, \|x\| < z$ ***(*)***

1. ***t=0 – неравенство справедливо.***
2. ***Пусть при*** $t = t_i$ ***неравенство перестает выполняться и*** $\|x(t_i)\| = z(t_i)$

В силу (2) при достаточно малом z_0 *-* $\| z \| < K$

При $0 \le t \le t_0$ *(*) верно, поэтому* $\| x \| < K$ *, (т.е.* $x \in \Omega$*)*

поэтому при $t = t_i$, $z(t_i) = z_0 e^{-\alpha t_i} + C\int\limits_0^{t_i} e^{-\alpha(t_i - \xi)} z^2 d\xi = \| x(t_i) \| \le$

$$\le C \| x_9 \| e^{-\alpha t_i} + C\int\limits_0^{t_i} e^{-\alpha(t_i - \xi)} \| x \|^2 \, d\xi < z_0 e^{-\alpha t_1} + C\int\limits_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1 - \xi)} z^2 d\xi$$

«противоречие» $\Rightarrow \forall t > 0$ *верно (*)*

Теперь, пусть $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \| x_0 \| < \dfrac{\varepsilon}{2C} = \delta$, $z_0 : C\delta < z_0 < 2\varepsilon\delta = \varepsilon$.

Тогда $z_0 > c \| x_0 \|$*, и в силу (*) и 2)* $\Rightarrow \| x \| < z < z_0 < \varepsilon$, $\| x_0 \| < \delta$ *- т.е. тривиальное решение (3) устойчиво, причем в силу 3) асимптотически.*

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y} \\ \dot{y} = \sin ax - \ln(1-4y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = ax - 4y \end{cases}, \ \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}$$

2) Аналогично.

3) Очевидно.

4) $\left(\int\limits_0^t y d\xi\right)_i = \int\limits_0^t y_i d\xi \Rightarrow \left[\left(\int\limits_0^t y d\xi\right)_i\right]^2 \le \left(\int\limits_0^t \| y \| d\xi\right)^2 \Rightarrow \left\| \int\limits_0^t y d\xi \right\| \le C\int\limits_0^t \| y \| d\xi$

5) Столбцы фундаментальной матрицы W(t) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} b_{10} + b_{11}t + \ldots + b_{1m_{k-1}} t^{m_{k-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n0} + b_{n1}t + \ldots + b_{nm_{k-1}} t^{m_{k-1}} \end{pmatrix} e^{\lambda_k t}$$ *, пусть* $\lambda_k = p_k + iq_k$

$$\left| (b_{j0} + b_{j1}t + \ldots + b_{jm_{k-1}} t^{m_{k-1}}) e^{p_k t} e^{iq_k t} \right| \le \left\{ | (b_{j0} + b_{j1}t + \ldots + b_{jm_{k-1}} t^{m_{k-1}} | \le C(1 + t^{m_{k-1}}) \right\}$$

$$\le C(1 + t^{m_{k-1}}) e^{-\gamma t} e^{(p \ + \gamma)t} \le C_1 e^{(p+\gamma)t}$$

ограничена при $\gamma > 0$*. Таким образом,* $\left| K_{ij}(t,0) \right| < Ce^{(p+\gamma)t}$

Убедимся, что $K(t,\xi) = K(t-\xi,0)$.

$K(t,\xi)$ ***удовлетворяет*** $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}K(t,\xi) = AK(t,\xi),\ A - const \\ K|_{t=\xi} = K(\xi,\xi) = E \end{cases}$

заменяя t ***на*** $(t-\xi) \Rightarrow K(t-\xi,0)$ ***удовлетворяет*** $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}K(t,\xi) = AK(t,\xi) \\ K|_{t=\xi=0} = K(0,0) = E \end{cases}$

поэтому по теореме единственности $K(t,\xi) = K(t-\xi,0)$

Доказательство Теоремы 1:

$\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{in}x_n + R_{(2)i} \Rightarrow x' = A(t)x + f()$, ***т.е. решение*** $x = K(t,0)x_0 + \int\limits_0^t K(t,\xi)R_{(2)}(\xi)d\xi$

Рассмотрим точку $x = 0$ ***фазового пространства*** $\Omega = \{\|x\| < K\}$ ***по Лемме 2),***

$\|R_{(2)}\| \le C\|x\|^2 \Rightarrow \|x\| \le Ce^{-\alpha t}\|x_0\| + C\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\xi)}\|x\|^2\,d\xi$, $-\alpha = \beta + \gamma$

Рассмотрим вспомогательную задачу.

23. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная Д.Н.Ф.

Функции от переменных $x_1,\ldots,x_n$ со значениями из $\{0,1\}$ обозначим $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Их всего $P_2(n)=2^{2^n}$

Определение. В $f(x_1,\ldots,x_n)$, x_j называется существенной, если $\exists\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n$:

$f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\neq f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$

И фиктивной, если $\forall\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n \Rightarrow f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$

Операции над ф.а.л. – Добавление и удаление фиктивных переменных

Определение. Ф.а.л. называются равными, если они переводятся одна в другую добавлением или отбрасыванием фиктивных переменных.

Определение. Формула над F. (индуктивное определение)

$F=\{f_1(x_1,\ldots,x_{n_1}),\ldots,f_s(x_1,\ldots,x_{n_s}),\ldots\}$

1) f_i - формула над F. (базис)
2) Если каждый из объектов $A_1,\ldots,A_{k_i}$ либо формула над F, либо переменная, то $f_i(A_1,\ldots,A_{k_i})$ - формула над F.

Определение. Две формулы называются эквивалентными, если они реализуют равные функции.

Значение формулы.

1) $f_i(x_1,\ldots,x_{k_i})\big|_{\substack{x_1=\alpha_1\\ \ldots\\ x_n=\alpha_n}}=f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k_i})$
2) $A_1\big|_{(\alpha_1,\ldots\alpha_n)}=\beta_1,\ldots,A_n\big|_{(\alpha_1,\ldots\alpha_n)}=\beta_n \Rightarrow F_{\alpha_1,\ldots\alpha_n}=f_i(\beta_{1_i},\ldots,\beta_{n_i})$

$x^\sigma=\begin{cases}x, \sigma=1\\ \bar{x}, \sigma=0\end{cases}$; $x_1^{\sigma_1},\ldots,x_n^{\sigma_n}=1$ на 1-м наборе $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$

Теорема.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ -ф.а.л. Тогда $1\le k\le n$ $\quad f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee\limits_{(\sigma_1,\ldots\sigma_k)} x_1^{\sigma_1}\ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$

(V берем по всевозможным $x_1,\ldots,x_k$)

Доказательство:

1) Берем $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ $\bigvee\limits_{(\sigma_1,\ldots\sigma_k)}\alpha_1^{\sigma_1}\ldots\alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n)$

Два случая:

а) $(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\Rightarrow f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$

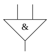
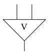
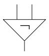
б) $(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)\neq(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\Rightarrow \alpha_1^{\sigma_1}\ldots\alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n)=0$

Частные случаи:

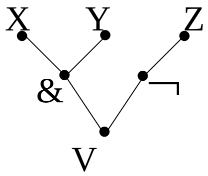
1) k=1 – разложение по переменной $f(x_1,\ldots,x_n)=\overline{x_1}f(0,x_2,\ldots,x_n)\vee x_1 f(1,x_2,\ldots,x_n)$
2) k=n – совершенная д.н.ф. $f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee\limits_{(\sigma_1,\ldots\sigma_n)} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=\bigvee\limits_{\substack{(\sigma_1,\ldots\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}$

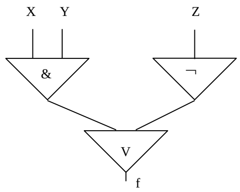
Следствие. Любую ф.а.л. можно представить в виде с.д.н.ф.

24. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.

Б = {  ***,***  ***,***  ***} - стандартный базис.***

<u>Определение.</u> Ориентированный граф без контуров называется СФЭ в базисе Б, если каждая вершина нулевой степени захода (не входят дуги) помечена символом переменной, а любая другая (1 или 2 входа) символами &, V, ¬. Схема реализует функцию, образующуюся на выходе.





$f=(x\,\&\,y)\vee\bar{z}$ [redacted]

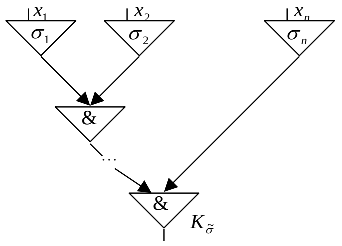
*<u>Проблема синтеза СФЭ</u>****: по данной функции f построить схему*** Σ [redacted]***, ее реализующую.***

<u>Алгоритмы синтеза.</u>

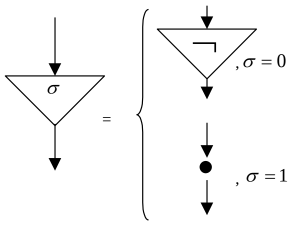
1) По совершенной ДНФ.

$$f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n):\\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\,\&\dots\&\,x_n^{\sigma_n}$$ [redacted]

Реализуем $K_{\tilde{\sigma}}=x_1^{\sigma_1}\,\&\dots\&\,x_n^{\sigma_n}$ [redacted]



$\Sigma_{K_{\tilde{\sigma}}}$



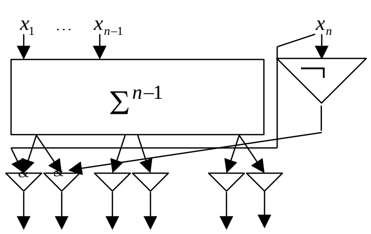
$L(\Sigma_{K_{\tilde{\sigma}}})\le 2n-1$

$L(\Sigma)\le n+S(n-1)$

$L(f)\le n+S(n-1)+S-1<n(S+1)$

$f\ne 1\Rightarrow S\le 2^n-1\Rightarrow L(n)\le n2^n$

2) По реализации множества всех конъюнкций



Пусть Σ^n ***- множество всех*** $\{x_1^{\sigma_1},\dots,x_n^{\sigma_n}\}$

$$L(\Sigma^1)=1$$

$$L(\Sigma^n)=L(\Sigma^{n-1})+1+2^n=2\cdot 2^n+n-4$$

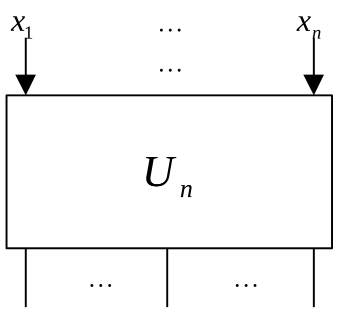
S – количество V в с. д.н.ф. $S\le 2^n-1$

$$\Rightarrow L\le 3\cdot 2^n+n-5$$

3) Разложение по 1-ой переменной

$$f(x_1,\dots,x_n)=x_n\ \&\ f(x_1,\dots,x_{n-1},1)\vee\overline{x_n}\ \&\ f(x_1,\dots,x_{n-1},0)=x_n f'\vee x_n f''$$

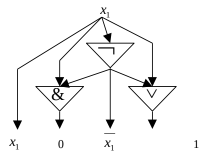
$$L\le 3\cdot 2^n-4$$



<u>Определение.</u> Универсальный мн-к – СФЭ с n входами и s выходами и $\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow \exists \tau(i) \sim f_i(x_1, \ldots, x_n)$ ***- выход (*** 2^{2^n} ***выходов).***

<u>Утверждение.</u> $\exists U_n : L(U_n) \le 2 \cdot 2^{2^n}$

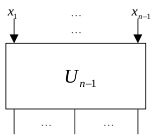
<u>Доказательство (по индукции):</u>



1) $n = 1$***:***

2) Индукция:

$$f(\tilde{x}) = x_n \cdot f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \overline{x_n} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = x_n \cdot f' \vee \overline{x_n} f''$$

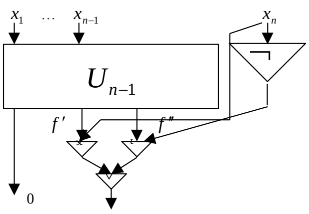


1) $f' \equiv 0,\ f'' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$

2) $f'' \equiv 0,\ f' \ne 0$ ***их*** $2^{2^{n-1}} - 1$

3) $f'' \equiv 0,\ f'' \ne 0$ ***их*** $2^{2^{n-1}} - 1$

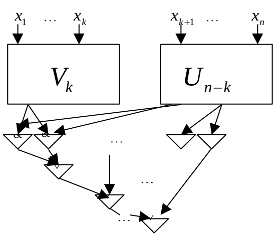
4) $f'' \ne 0,\ f' \ne 0$ ***их*** $2^{2^n} - 2 \cdot (2^{2^{n-1}} - 1) - 1$



$$L(U_n) \le L(U_{n-1}) + (2^{2^n} - [(2^{2^{n-1}} - 1) + 1] + \{2^{2^n} - 2[2^{2^{n-1}} - 1] - 1\} \le$$
$$\le 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^{n-1}} \le 2 \cdot 2^{2^n}$$

<u>Теорема Шеннона.</u>

Существует метод синтеза $L \sim 8 \dfrac{2^n}{n}$.



(V_k построена по методу 2)

$$\Rightarrow L(V_k) + L(U_{n-k}) + 2 \cdot 2^k - 1$$

$$f = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow L(\Sigma) \le 4 \cdot 2^k + 2 \cdot 2^{2^{n-k}} + k - 5$$

Пусть m=n-k;

$$m = [\log_2 (n - 2\log_2 n)]$$

$$\tfrac{1}{2}(n + 2\log_2 n) < 2^m < (n - 2\log_2 n)$$

$$\Rightarrow L \le 4\frac{2^n}{2^m} + 2 \cdot 2^{2^m} \le 8\frac{2^n}{n}$$

25. Вероятностное пространство. случайные величины. закон больших чисел в форме Чебышева

Вероятностное пространство - это тройка (Ω, ***A***, P), где

Ω = {ω} — пространство элементарных событий (исходов) - непустое множество, элементы ω которого интерпретируются как взаимно исключающие исходы изучаемого случайного явления;

A — набор подмножеств множества Ω, называемых событиями. ***A*** является σ-алгеброй, т.е. Ω∈***A***, если A1∈***A*** ⇒ $\overline{A1}$ ∈***A***, ∀A1A2,...∈A ⇒ ∪i=1,∞ Ai∈A;

P вероятность — функция, определенная на ***A*** и удовлетворяющая следующим условиям:

1) P (A) >=0 ∀A∈***A***;
2) P (Ω) =1
3) P (∪i=1,∞Ai) =∑i=1,∞ P(Ai), если AiAj =∅ при i≠j

⇔ 3а) P (A+B) =P(A)+P(B), AB=∅

3б) ∀A1⊃A2⊃...⊃An⊃..., ∩∞Ai=∅ ⇒ n→∞lim P(An)=0

Примеры:

1) Пусть Ω=(ω1, ..., ωs), A={ωi1, ...,ωik}—всевозможные подмножества множества Ω
P(ω1)=...=P(ωs)=1/s ⇒ P(A)=⏐A⏐/⏐Ω⏐—классическое опр. вероятности
2) Пусть Ω — множество в n-мерном евклидовом пространстве, объём μ(Ω) которого >0 и конечен. σ- алгебра ***A*** состоит из всех измеримых (т.е. имеющих объём) подмножеств A⊂Ω.
P(A)=μ(A)/ μ(Ω), A∈Ω — геометрическое определение вероятности.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, ***A***, P).

Случайной величиной называется действительная функция от элементарного события ξ=ξ(ω), ω∈Ω, для которой при ∀ действительных x множество {ω: ξ(ω)<x} принадлежит ***A*** (т.е. является событием) и для него определена вероятность P{ω: ξ(ω)<x} или P{ξ<x}. Эта вероятность, рассматриваемая как функция x, называется функцией распределения случайной величины ξ и обозначают Fξ(x). С помощью Fξ(x) можно однозначно определить P(ξ∈B) для борелевских множеств на числовой прямой. P(ξ∈B) как функция B называется распределением вероятностей случайной величины ξ.

Примеры:

Если pξ(x) >= 0 ∀ x:

1) абсолютно непрерывные распределения:

P{ξ∈B}= $\int_B p_\xi(x)dx$, где p(x) - плотность вероятности

2) дискретные распределения - задаются конечным или счетным набором вероятностей

P{ξ=xK}: $\sum_k P\{\xi = xK\} = 1, \quad F_\xi(x) = \sum_{k:xK\le x} P\{\xi = xK\}$

Свойства:

1) lim x->∞ Fξ(x) = 1
2) lim x->-∞ Fξ(x) = lim x->-∞ P(ξ<x) = 0
3) Fξ(x) - неубывающая функция
4) Fξ(x) односторонне непрерывна (слева, если Fξ(x)=P(ξ<x)) lim x->x0- F(x) = F(x0)

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число Mξ = $\int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$, если интеграл Лебега ∃. Если ξ имеет плотность, то Mξ = $\int_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx$. Если ξ - дискретна, то Mξ = $\sum_k xKP\{\xi = xK\}$, если ряд сходится абсолютно. В общем случае Mξ = $\int_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x)$.

Дисперсией случайной величины ξ называется число Dξ = M$(\xi - M\xi)^2$={определение математического ожидания}=$M\xi^2 - (M\xi)^2$

Неравенство Чебышева

$$\forall \xi: D\xi < \infty, \forall \varsigma \qquad P\{|\xi - M\xi| \ge \varsigma\} \le \frac{D\xi}{\varsigma^2}$$

Доказательство:

$P\{|\xi - M\xi| \ge \varsigma\} = \int_{|x-M\xi|\ge\varsigma} dF(x)$ Так как в области интегрирования $|x - M\xi| / \varsigma \ge 1$,

то $\int_{|x-M\xi|\ge\varsigma} dF(x) \le \frac{1}{\varsigma^2} \int_{|x-M\xi|\ge\varsigma} (x - M\xi)^2 dF(x) \le \frac{1}{\varsigma^2} \int (x - M\xi)^2 \mu = \frac{D\xi}{\varsigma^2}$.

Теорема Чебышева

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной C: $D\xi_1 \le C$, $D\xi_2 \le C$,..., $D\xi_n \le C$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n->\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\,\xi_k| < \varepsilon\} = 1.$$

Доказательство:

По свойствам дисперсии: $D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\,\xi_k$ => $D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} C = \frac{C}{n}$

Из неравенства Чебышева: $P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\,\xi_k| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k)}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$,n->∞ =>

$\lim_{n->\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\,\xi_k| < \varepsilon\} = 1$ так как *P* не может быть > 1.

Свойства вероятности (из определения):

1) Если $A \subseteq B$, то P(B\A) = P(B) - P(A)
   Т.к. B=A+(B\A), $A \cap (B \backslash A) = 0$ => P(B) = P(A) + P(B\A)
   Аналогично $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ и $\cap_{n=1,\infty} A_n = 0$ => $\lim P(A_n)=0$
2) Если $A \subseteq B$, то P(A) <= P(B)
3) $A \in \mathbf{A}$ => 0<=P(A)<=1
4) $P(\bar{A})=1-P(A)$
5) $P(\varnothing)=0$

Примеры распределений:

1) $P(\xi=a) = 1$?!
2) $P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, k=0, ∞ Пуассона
3) p(x)=1/(b-a) на [a, b] Равномерное
4) $p(x)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ Нормальное (m, σ)

Доказательство непрерывности $F\xi(x)$ слева (см. выше):

Пусть {yN} неубывает и -> x0. Тогда ∃ последовательность вложенных событий:

$(\xi < yN) \subset (\xi < yN+1)$ ..., $\cup_{n=1,\infty} (\xi < yN) = (\xi < x0)$

$\lim P(\xi < yN) = P(\xi < x0)$ => $\lim_{x->x0-}$ F(x) = F(x0)

26. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол

Задача: Вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$

Заменяется конечной суммой $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=o}^{n} Ckf(xK)$ - квадратурная формула

Ck - коэффициенты квадратурной формулы, xK - узлы квадратурной формулы.

$\Psi_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} Ckf(xK)$ - погрешность квадратурной формулы

Введем на [a, b] равномерную сетку $\omega_n = \{x_i = a + ih, i = 0, \dots, N, Nh = b - a\}$

$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{xi-1}^{xi} f(x)dx$ Строим квадратичные формулы для $\int_{xi-1}^{xi} f(x)dx$

1) Формула прямоугольников

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \sim f\left(x_{i-1/2}\right)h \qquad \Psi_i = \int_{xi-1}^{xi} f(x)dx - f(x_{i-1/2}) * h = \int_{xi-1}^{xi} (f(x) - f(x_{i-1/2}))dx =$$

$$\int_{xi-1}^{xi} [f(x_{i-1/2}) + (x - x_{i-1/2}) f'(x_{i-1/2}) + \frac{(x - x_{i-1/2})^2}{2} f''(\xi)|_{\xi \in [xi-1, x]} - f(x_{i-1/2})]dx \Rightarrow$$

$$|\Psi_i| \le M_{2i} \int_{xi-1}^{xi} \frac{(x - x_{i-1/2})^2}{2} dx = \frac{h^3}{24} M_{2i}, \text{ где } M_{2i} = \max|f''(x)| \text{ при } x \in [x_{i-1}, x_i] (\sim O(h^3))$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}) * h \qquad \Psi = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_{i-1/2})^2}{2} f''(\xi_i)dx \le \frac{M_2 Nh^3}{24} = M_2 Nh^3 / 24 =$$

$$M_2 h^2 / 24 \Rightarrow \Psi = O(h^2)$$

2) Формула трапеций

$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \sim \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h$, получается путем замены $f(x)$ интерполяционным многочленом первой степени,

построенным по узлам $x_{i-1}, x_i, \dots$ т.е. функцией

$$L_{1i} = ((x - x_{i-1}) f(x_i) - (x - x_i) f(x_{i-1})) / h$$

$$f(x) - L_{1i}(x) = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2} f''(\xi_i(x))$$

$$|\Psi_i| = \int_{xi-1}^{xi} f(x)dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} * h = \int_{xi-1}^{xi} (f(x) - L1i(x))dx = \int_{xi-1}^{xi} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2} f''(\xi_i(x))\, dx \quad \Rightarrow$$

$|\Psi_i| \le M2i\, h^3/12$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} * h = h(0.5f(x0) + f(x1) + f(x2) + \dots + f(xN-1) + 0.5f(xN))$$

-- составная формула трапеций $\quad |\Psi| \le M_2 h^2/12 = O(h^2)$

3) Формула Симпсона (парабол)

Обозначим:

$Ln = \sum_{k=0}^{n} Lnk = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k)$ - Интерполяционный полином в форме Лагранжа, где

$$\omega(x) = \prod_{j=o}^{n} (x - x_j), \quad \omega'(x_k) = \prod_{j=o, j \ne k}^{n} (x_k - x_j) \qquad f(x) - Ln = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega(x)$$

В формуле Симпсона:

$$f(x) \sim L2 \sim \{ \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_{i-1/2})(x_{i-1} - x_i)} f(x_{i-1}) + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1})(x_{i-1/2} - x_i)} f(x_{i-1/2}) + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1/2})} f(x_i) \}$$

$=$

$= \dfrac{2}{h^2}$ { $(x - x_{i-1/2})(x - x_i)$ f(xi-1) - 2 $(x - x_{i-1})(x - x_i)$ f(xi-1/2) + $(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})$ f(xi) } $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\int_{xi-1}^{xi} L2i(x)dx = \frac{h}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i))$$

=> $$\int_{xi-1}^{xi} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i))$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i)) = \frac{h}{6}[f_0 + f_N + 2(f_1 + \ldots + f_{N-1}) + 4(f_{1/2} + \ldots + f_{N-1/2})]$$

$|\Psi_i| \le$ M4i h^5/2880 , $|\Psi| \le$ M4 h^4 /2880

Для любого многочлена 3-й степени:

$$\int_{xi-1}^{xi} f(x)dx - \frac{h}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i)) = \int_{xi-1}^{xi} r_i(x)dx \,,$$

где $r_i(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x - x_i)(x - x_{i-1/2})^2(x - x_{i-1})$

ri(x) = f(x) - H3(x), где H3(x) - многочлен эрмита 3-й степени;

H3(xi-1) = f(xi-1), H3(xi-1/2) = f(xi-1/2), H3(xi) = f(xi) и $H3'(x\ldots) = f'(x\ldots)$ **- !?**

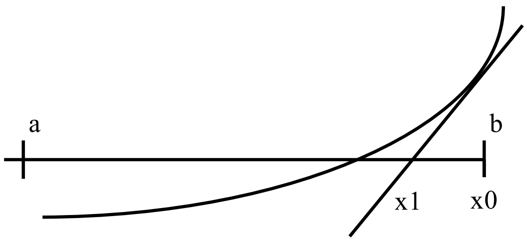
27. Методы Ньютона и секущих для решения нелинейных уравнений.

1. Метод Ньютона

Опр. Корень c называется *изолированным* на сегменте $[a,b]$, если c - внутренняя точка $[a,b]$ и других корней на $[a,b]$ нет.

Пусть надо найти корень уравнения $f(x)=0$, изолированный на сегменте $[a,b]$.

Пусть x_0 - первое приближение.



Проводя касательные построим последовательность $x_0, x_1, \dots, x_N, \dots$ точек пересечения касательных с осью Ox.

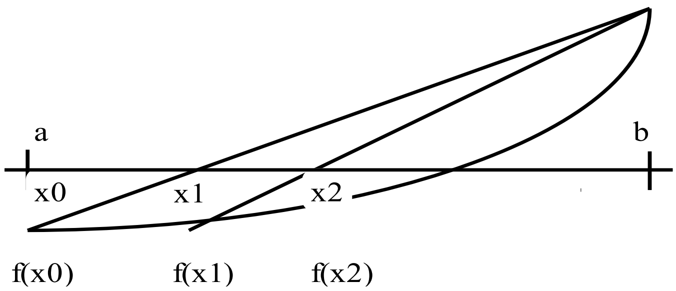
Значения x_N получаются по формуле:

$x_{N+1} = x_N - f(x_N)/f'(x_N)$ т.к. уравнение касательной в т $x_N: y = f'(x_N)(x - x_N) + f(x_N)$

2. Метод Хорд

Уравнение хорды (секущей), проходящей через точки $(x_N, f(x_N))$ и $(b, f(b))$: $\dfrac{y - f(x_N)}{f(b) - f(x_N)} = \dfrac{x - x_N}{b - x_N}$

Т.о. значения x_N (т. пересечения хорд с осью Ox) получаются по формуле:



$$\frac{0 - f(x_N)}{f(b) - f(x_N)} = \frac{x - x_N}{b - x_N} \Rightarrow x_{N+1} = x_N - \frac{b - x_N}{f(b) - f(x_N)} f(x_N)$$

3. Обоснование метода Ньютона и хорд

Пусть требуется найти решение уравнения $F(x) = x$. (*)

Уравнение $f(x)=0$ сводится к (*) путем замены $F(x) = f(x) + x$. Тогда:

Опр. Последовательность $x_0, x_1, \dots, x_N, \dots$ будем называть итерационной, если $\forall x_N$ выражается по рекурсивной формуле $x_N = F(x_{N-1})(x_{N+1} = F(x_N))$, а в качестве x_0 взято $\forall$ число из области определения $F(x)$.

Утв 1. Пусть $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $x_N \in [a,b] \forall N$, тогда, если $\{x_N\} \to c$, то c является корнем уравнения (*).

Доказательство: Так как $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$ $c - F(c) = \lim\limits_{N\to\infty}(x_N - F(x_{N-1}))$. $F(x_{N-1}) = x_N$ по (*) ! Таким образом: $F(c) = c$.

Утв 2. Пусть c - корень (*), и пусть в ε-окрестности точки c: $|F'(x)| \le a < 1$. Тогда итерационная последовательность т. $x_0, x_1, \dots, x_N, \dots,$ где $x_0 \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ сходится к корню c.

Доказательство: Докажем, что $x_N \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ $\forall N$ по индукции:

1. $x_0 \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ по условию.

2. Пусть $x_{N-1} \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Тогда $x_N - c = F(x_{N-1}) - F(c) =$ {по теореме Лагранжа} $= F'(\xi)(x_{N-1} - c)$

$|x_N - c| = |F'(\xi)||x_{N-1} - c| \le a|x_{N-1} - c|$ т.о. $|x_N - c| < |x_{N-1} - c| \quad \forall N$ и следовательно $x_N \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$.

Более того: $|x_N - c| \le a|x_{N-1} - c| \Rightarrow |x_N - c| \le a^N |x_0 - c| \Rightarrow \{x_N\} \to c$ со скоростью, не ниже скорости геометрической прогрессии со знаменателем *a*.

<u>Обоснование метода Ньютона</u>

Пусть $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную и монотонную 1-ю производную, сохраняющую определенный знак.

Для определенности будем считать, что $f'(x) > 0$ и $f'(x)$ не убывает на $[a,b]$.

f(x) = 0 <=> F(x) = x, где F(x) = x - f(xN)/f'(xN)

Покажем, что последовательность xN = F(xN-1) сходится к корню c, если x0 $\ge$c.

1) Если x0 $\ge$ c, то xN $\ge$ c

по индукции:

база индукции: x0 = b $\ge$ c по условию

шаг индукции: xN - xN+1 = f(xN)/f'(xN) = {f(c) = 0} = (f(xN) - f(c))/f'(xN) = { Th. Лагранжа } = $f'(\xi)$ (xN - c)/$f'(xN)$

,где $\xi \in [c, xN] \le$ { монотонность производной } $\le$ xN - c => xN+1 $\ge$ c $\forall$ N

Т. о. последовательность $\{x_N\}$ ограничена снизу. Покажем:

2) $\{x_N\}$ - монотонна.

xN $\ge$ c по 1) => {монотонность функции} => f(xN) $\ge$ f(c)=0 => {f'(x) > 0} => xN - xN+1 = f(xN)/f'(xN) $\ge$ 0 => xN $\ge$ xN+1

По 1), 2) $\{x_N\}$ сходится как невозрастающая и ограниченная снизу последовательность.

По Утв. 1 предел $\{x_N\}$ является корнем уравнения (*). Все доказано.

<u>Обоснование метода хорд</u>

Пусть f'(x) на $[a,b]$ непрерывна, монотонна и сохраняет определенный знак.

Для определенности будем считать, что f'(x) > 0 и не убывает.

f(x) = 0 <=> F(x) = x, где F(x) = x - $\dfrac{(b-x) * f(x)}{f(b) - f(x)}$

xN+1 = xN - $\dfrac{b - xN}{f(b) - f(xN)} * f(xN)$

1) Если $x_0 \le c$, то $x_N \le c$

по индукции:

база индукции: x0 = a $\le$ c по условию шаг индукции: $x_{N+1} - x_N = -\dfrac{b - x_N}{f(b) - f(x_N)} * f(x_N) = \{f(c) = 0\} =$

$$\frac{(b - x_N) * [f(c) - f(x_N)]}{[f(b) - f(c)] + [f(c) - f(x_N)]} = \text{\{по теореме Лагранжа\}} = \frac{(b - x_N) * f'(\xi_1) * [c - x_N]}{f'(\xi_2)[b - c] + f'(\xi_1)[c - x_N]}$$

,где $\le x_N < \xi_1 < c < \xi_2 < b \le$ { монотонность производной } $\le \dfrac{(b - x_N) * f'(\xi_1) * [c - x_N]}{f'(\xi_1)[(b - c) + (c - x_N)]} = c - x_N \Rightarrow$

$x_{N+1} - x_N \le c - x_N \Rightarrow x_{N+1} \le c \quad \forall N$

Т. о. последовательность $\{x_N\}$ ограничена сверху. Покажем:

2) $\{x_N\}$ - монотонна.

Т.к. $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает: xN $\le$ c $\le$ b => f(xN) $\le$ f(c)=0 $\le$ f(b) => {из выражения для xN+1 - xN} => xN+1 - xN $\ge$ 0 => xN+1 $\ge$ xN

По 1), 2) $\{x_N\}$ сходится как неубывающая и ограниченная сверху последовательность. По <u>Утв. 1</u> предел $\{x_N\}$ является корнем уравнения (*). Все доказано.

28. Численное решение задачи Коши для ОДУ Примеры методов Рунге-Кутта.

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ:

$$\frac{dU(t)}{dt} = f(t,u), t > 0, U(0) = U_0$$

Пусть $D = \{|t| \le a, |U - U_t'| \le b\}$, $f(t,U)$ непрерывна по t и в D $|f| \le M$. В D f удовлетворяет условию Липшица по *U:*

$$|f(t,U') - f(t,U'')| \le L|U' - U''|.$$

$\Rightarrow \exists!$ решение при $|t| \le t_c = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

При исследовании численными методами решения задачи Коши будем предполагать, что решение $\exists!$ и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Определение

1. $w_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,2,\dots\}$ - равномерная сетка с шагом $\tau > 0$.

   Обозначение $y_n = y_n(t_n)$ - приближенное решение (сеточная функция)
2. Фиксируем t и построим последовательность сеток $w_\tau : \tau \to 0$ и $t_n = n\tau = t$. Метод сходится в точке *t,* если $|y_n - U(t_n)| \to 0$ при $\tau \to 0, t_n = t$.
3. Метод сходится на $(0,T]$, если он сходится в $\forall$ точке $t \in (0,T]$
4. Метод имеет *p*-й порядок точности, если $\exists p > 0 : |y_n - U(t_n)| = O(\tau^p), \tau \to 0$.
5. $z_n = y_n - U(t_n)$ - погрешность метода.

1. Метод Эйлера.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - f(t_n, y_n) = 0, n = 0,1,2,\dots, y_0 = U_0 \Rightarrow y_{n+1} = \tau f(t_n, y_n) + y_n, n = 0,1,\dots, y_0 = U_0$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} = f(y_n + t_n, U_n + z_n) - \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)}$$

$\psi_n^{(1)} = -\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} + f(t_n, U_n)$ - невязка или погрешность аппроксимации разностного уравнения на ???

$$\psi_n^{(2)} = f(y_n + t_n, U_n + z_n) - f(t_n, U_n)$$

6. Разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_n^{(1)} \to 0$ при $\tau \to 0$.
7. Разностный метод имеет *p* - й порядок аппроксимации, если $\psi_n^{(1)} = O(\tau^p)$.

т.к. $\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = U'(t_n) + O(\tau^p)$, то $\psi_n^{(1)} = -U'(t_n) - f(t_n, U_n) + O(\tau) = O(\tau)$, т.е. метод Эйлера имеет 1-й порядок аппроксимации.

2. Симметричная схема.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) = 0; n = 0,1,\dots \quad y_0 = U_0$$

$\Rightarrow y_{n+1} = F_n + 0.5\tau f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad F_n = y_n + 0.5\tau f(t_n, y_n)$ - неявный метод.

$$\Psi_n^{(1)} = -\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} + \frac{1}{2}\left(f(t_n, U_n) + f(t_{n+1}, U_{n+1})\right) =$$

$= -U_n' - \frac{\tau}{2}U_n'' + O(\tau^2) + \frac{1}{2}(U_n' + U_{n+1}') = -U_n' - \frac{\tau}{2}U_n'' + \frac{1}{2}\left(U_n' + U_n' + \tau U_n'' + O(\tau^2)\right) = O(\tau^2)$, т.е. имеет 2-й порядок аппроксимации.

3. Методы Рунге-Кутта.

Явный m-этапный метод Рунге-Кутта:

Пусть $y_n = y(t_n)$ известны, задаются a_i и $b_{ij}, i = 2,\dots,m,\ j = 1,\dots,m-1; \sigma_i, i = 1,2,\dots,m$ и последовательно вычисляются функции:

$$\Re_1 = f\left(t_n, y_n\right),\ \Re_2 = f\left(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau\Re_1\right),\ \Re_3 = f\left(t_n + a_3\tau, y_n + b_{31}\tau\Re_1 + b_{32}\tau\Re_2\right);\ldots$$

$$\Re_m = f\left(t_n + a_m\tau, y_n + b_{m1}\tau\Re_1 + b_{m2}\tau\Re_2 + \ldots + b_{m,m-1}\tau\Re_m\right)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sum_{i=1}^{m}\sigma_i\Re_i, \ldots \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \tau\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\Re_i \ldots; \sum_{i=1}^{m}\sigma_i = 1$$

При $m = 1 \Rightarrow$ схема Эйлера

При $m = 2 \Rightarrow$ $\Re_1 = f\left(t_n, y_n\right),\ \Re_2 = f\left(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau\Re_1\right),$

$$y_{n+1} = y_n + \tau\left(\sigma_1\Re_1 + \sigma_2\Re_2\right)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 f\left(t_n, y_n\right) + \sigma_2 f\left(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau f\left(t_n, y_n\right)\right)$$

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} + \sigma_1 f\left(t_n, U_n\right) + \sigma_2 f\left(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau f\left(t_n, U_n\right)\right)$$

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = U'\left(t_n\right) + \frac{\tau}{2}U''\left(t_n\right) + O\left(\tau^2\right)$$

$$f\left(t_n + a_2\tau, U_n + b_{21}\tau f_n\right) = f_n + a_2\tau\frac{\partial f_n}{\partial t} + b_{21}\tau f_n\frac{\partial f_n}{\partial U} + O\left(\tau^2\right)$$

$$U'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial U}U' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial U}f \Rightarrow$$

$$\psi_n^{(1)} = -U'\left(t_n\right) + \left(\sigma_1 + \sigma_2\right)f_n + \tau\left[\left(\sigma_2 b_{21} - 0.5\right)f_n\frac{\partial f_n}{\partial U} + \left(\sigma_2 a_2 - 0.5\right)\frac{\partial f_n}{\partial t}\right] + O\left(\tau^2\right).$$

Если $\sigma_1 + \sigma_2 = 1,$ то имеем 1-ый порядок аппроксимации.

Если еще $\sigma_2 a_2 + \sigma_2 b_{21} = 0.5 \Rightarrow$ 2-ой порядок аппроксимации.

Получили схему метода Рунге-Кутта 2-ого порядка:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = (1 - \sigma)f\left(t_n, y_n\right) + \sigma f\left(t_n + a\tau, y_n + a\tau f\left(t_n, y_n\right)\right),\ \sigma a = 0.5$$

При $\sigma = 1; a = 0.5 \Rightarrow \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau}{2}f_n\right)$

При $\sigma = 0.5; a = 1 \Rightarrow \Re_1 = f\left(t_n, y_n\right), \Re_2 = f\left(t_n + \tau, y_n + \tau\Re_1\right),\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{\tau}{2}\left(\Re_1 + \Re_2\right).$

Метод 3- его порядка:

$$\Re_1 = f\left(t_n, y_n\right),\ \Re_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}\Re_1\right),\ \Re_3 = f\left(t_n + \tau, y_n - \tau\Re_1 + 2\tau\Re_2\right),\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}\left(\Re_1 + 4\Re_2 + \Re_3\right)$$

4-ого порядка: $\Re_1 = f\left(t_n, y_n\right),\ \Re_2 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau}{2}\Re_1\right),\ \Re_3 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau}{2}\Re_2\right),$

$$\Re_4 = f\left(t_n + \tau, y_n + \tau\Re_3\right).$$

29. Задача Коши для уравнения колебания струны. формула Даламбера

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \; (*) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$ Уравнение характеристики: $dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} dx - adt = 0 \\ dx + adt = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - at = C1 \\ x + at = C2 \end{cases}$

Сделаем замену переменных: $\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

$\forall$ решение $u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta) \quad \Rightarrow u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) (**)$

Т.о. $\forall$ решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ м.б. представлено в виде (**), т.е. есть функции $f_1, f_2 \Rightarrow (**)$ - общий интеграл уравнения $u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow$ Найдем функции f_1, f_2:

$$\begin{cases} u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \\ u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + C \Rightarrow$$

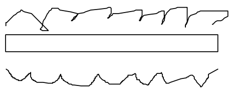
$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha + \frac{C}{2}; \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)d\alpha - \frac{C}{2} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_{x_0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha - \int_{x_0}^{x-at}\psi(\alpha)d\alpha\right] =$$

$$\frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$$ - формула Даламбера

Если в формуле Даламбера φ - дважды непрерывно дифференцируема, ψ - непрерывно дифференцируема, удовлетворяют уравнению и краевым условиям $(*) \Rightarrow \exists!$ решение, определяемое формулой Даламбера.

30. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения 1-ой краевой задачи.



стержень

$U(x,t)$ -температура в сегменте с координатами *x* во время *t.* С боковых сторон стержень теплоизолирован. Уравнение теплопроводности описывает процесс распространения тепла в твердом теле.

$F(x,t)$ - плотность тепловых источников , $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности

$f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{c\rho}$; c - удельная теплоемкость , *k*- коэффициент теплопроводности

ρ - плотность.

$$U_t=a^2\Delta U+f;\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Одномерное уравнение теплопроводности: $U_t=a^2U_{xx}+f(x,t).\oplus$ краевые условия

Основные краевые условия: $1)U(l,t)=\mu(t)\quad 2)U_x(l,t)=\nu(t)$

$3)U_x(l,t)=-\lambda\left[U(l,t)-\theta(t)\right]$

Первая краевая задача

$$U_t=a^2U_{xx}+f(x,t).(1)\quad 0\le x\le l\quad 0\le t\le T$$

$$U(0,t)=\mu_1(t)\quad (2)$$

$$U(l,t)=\mu_2(t)\quad (3)$$

$$U(x,0)=\varphi(x)\quad 0\le x\le l\quad (4)$$

Вторая краевая задача

$$\begin{cases}U_t=a^2U_{xx}+f(x,t)\\ \left[\begin{array}{l}U_x(0,t)=\upsilon\ (t),0\le t\le T\\ U_x(l,t)=\upsilon_2(t)\end{array}\right.\\ U(x,0)=\varphi(x),0\le x\le l\end{cases}$$

Задача Коши

$$\begin{cases}U_t=a^2U_{xx} & -\infty<x<\infty\\ U(x,0)=\varphi(x) & 0\le t\le T\end{cases}$$

$$Q_{lt}=\left\{(x,t):0<x<l,0<t\le T\right\}$$

Определение: $U(x,t)$ - решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности *(1) - (4),* если

1) $U\in C\left[Q_{lt}\right]$

2) $U\in C^2\left[Q_{lt}\right]$*(* непрерывность вторых производных по *x* и первых по *t)*

3) $U(x,t)$ удовлетворяет *(1)-(4)*

По классическому определению, пусть нет 1-ого условия $\Rightarrow U(x,t)=const\quad (x,t)\in Q_{lt}$

$U(0,t)=\mu_1(t),U(l,t)=\mu_2(t),\ U(x,0)=\varphi(x)$

Уравнению удовлетворяет, но это не разумное решение.

Метод разделения переменных

1)

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(0,t) = 0; 0 \le x \le l \\ U(l,t) = 0; 0 \le t \le T \\ U(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l \end{cases}$$

Решение в виде $V(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляем $\Rightarrow X(x)T'(t) = a^2 T(t) X''(x)$

деля на $a^2 XT \Rightarrow \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(x)}{a^2 T(x)} = -\lambda(\lambda = const) \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$

Для удовлетворяющих граничным условиям $\left.\begin{matrix} V(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ V(l,t) = X(l)T(t) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Для $X(x)$ получаем задачу *Штурма-Лиувилля*. Для нее λ при которых $\exists$ нетривиальное решение- собственные значения задачи Штурма-Лиувилля. А соответствующая $X(x)$ - функция задачи Штурма-Лиувилля.

У такой задачи бесконечно много собственных значений $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$ и собственных функций $X_n(x) = c \bullet \sin \dfrac{n\pi}{l} x$

Пусть $c = 1, n = 1,2,\ldots$

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} \dot{x}\right) dx = \begin{cases} l/2, m = n \\ 0, m \ne n \end{cases} = \frac{l}{2} \delta_{nm}$$ - символ Кронекера

Теперь уравнение для $T(x)$ при известном λ:

$$T_n'(t) = a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T(t) \Rightarrow T_n(t) = c_n \exp\left\{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}$$

Следовательно $V_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = c_n \exp\left\{-a^2 \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}; n = 1,2,\ldots$

$\forall V_n(x,t)$ - решение уравнения *(1) и (2) и (3)*

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \bullet \exp\left\{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}$$

Предполагая, что нужные условия выполнены.
Обеспечим выполнение (4)

$\varphi(x) = U(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{l} x\right) \Bigg|$ умножим на $\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)$ и $\int\limits_0^l dx$

Надо найти c_n.

$$\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \bullet \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = c_n \frac{l}{2}$$

$\Rightarrow c_n = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\dfrac{n\pi}{l} x\right) dx$, т.е. c_n являются коэффициенты ряда Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) d\xi \bullet \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (*)$$

Разложим в Фурье по *sin*

Получим (5) $U(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\dfrac{n\pi}{l}\right) \xi \partial\xi \bullet \exp\left\{-a^2 \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\} \sin\left(\dfrac{n\pi}{l} x\right)$

<u>Теорема (о существовании)</u>

Пусть функция $\varphi \in C^2[0,l]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \Rightarrow$ у задачи *(1)- (4)* существует решение (классическое) определяемое формулой (5).